TERMINALE SPÉCIALITÉ · DEVOIR SURVEILLÉ N°2

Corrigé détaillé

Exercice 1

1. **b)** : $-x^3+2x^2 = x^3(-1+\frac{2}{x})$, $x^3 \to -\infty$ et $(-1) : +\infty$. 2. **c)** $\frac{5}{2}$. 3. **c)** croissance comparée. 4. **b)**.

Exercice 2

1. $x^2 - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} - 1\right)$; par croissance comparée $\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} \to 0$, donc la parenthèse $\to -1$ et $\mathrm{e}^x \to +\infty$: limite $-\infty$.
2. Quantité conjuguée : $\sqrt{x^2+4x} - x = \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x} = \frac{4x}{x(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1)} = \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1} \to 2$.
3. Numérateur $\to 3 > 0$. $x^2-4 = (x-2)(x+2)$; pour $x < 2$ proche de 2 : $x-2<0$, $x+2>0$, donc dénominateur < 0 et $\to 0$. Limite : $-\infty$.
4. Composition : $X = \frac{2x+1}{x} = 2+\frac{1}{x} \to 2$, puis $\mathrm{e}^X \to \mathrm{e}^2$.
5. $\frac{3x-1}{x} \leqslant \frac{3x+\cos x}{x} \leqslant \frac{3x+1}{x}$ pour $x>0$; les bornes $3 \mp \frac{1}{x} \to 3$. Gendarmes : 3.

Exercice 3

1. $f(x) = \frac{x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})}{x(1-\frac{2}{x})} = x \cdot \frac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}$: $\lim_{+\infty} f = +\infty$, $\lim_{-\infty} f = -\infty$.
2. Numérateur en 2 : $4-4+3 = 3 > 0$. $x-2 < 0$ à gauche, > 0 à droite : $\lim_{2^-} f = -\infty$, $\lim_{2^+} f = +\infty$. La droite $x=2$ est asymptote verticale.
3. $x + \frac{3}{x-2} = \frac{x(x-2)+3}{x-2} = \frac{x^2-2x+3}{x-2} = f(x)$.
4. $f(x) - x = \frac{3}{x-2} \to 0$ en $\pm\infty$: Δ est asymptote oblique.
5. $\frac{3}{x-2} > 0 \iff x > 2$: $\mathcal{C}_f$ au-dessus de Δ sur $]2;+\infty[$, en dessous sur $]-\infty;2[$.
6. $f'(x) = 1 - \frac{3}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2-3}{(x-2)^2}$, du signe de $(x-2)^2-3 = (x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$. Racines $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$. f croissante sur $]-\infty;2-\sqrt{3}]$ et $[2+\sqrt{3};+\infty[$, décroissante sur $[2-\sqrt{3};2[$ et $]2;2+\sqrt{3}]$. Extremums : $f(2\pm\sqrt{3}) = 2\pm\sqrt{3}\pm\frac{3}{\sqrt{3}} = 2\pm 2\sqrt{3}$. Limites : $-\infty$ en $-\infty$, $-\infty$ en 2^-, $+\infty$ en 2^+, $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 4

1. En $-\infty$: $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$ donc $g \to 0$: asymptote $y=0$. En $+\infty$: $\mathrm{e}^{-x} \to 0$ donc $g \to 4$: asymptote $y=4$.
2. $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $1+\mathrm{e}^{-x} > 1$, d'où $0 < \frac{4}{1+\mathrm{e}^{-x}} < 4$.
3. $g = \frac{4}{u}$ avec $u = 1+\mathrm{e}^{-x}$, $u' = -\mathrm{e}^{-x}$: $g' = -\frac{4u'}{u^2} = \frac{4\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} > 0$. g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. $g(-x) = \frac{4}{1+\mathrm{e}^x}$. $g(-x)+g(x) = \frac{4}{1+\mathrm{e}^x} + \frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ (en multipliant numérateur et dénominateur de $g(x)$ par e^x) $= \frac{4(1+\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^x} = 4$. Donc $I(0;2)$ est centre de symétrie.