Devoir surveillé n°3 · 7 novembre 2023

Corrigé détaillé

Exercice 1

1. f est définie en 0. Pour $x \neq 0$, $\dfrac{\sin x}{2x} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sin x}{x}$. Or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (nombre dérivé de la fonction sinus en 0 : $\cos 0 = 1$). Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2} = f(0)$: f **est continue en** 0.
2. Sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$, g est un polynôme donc continue. Le seul point à examiner est $x = 1$. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x) = 1+1 = 2 = g(1)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x) = 1+a+1 = a+2$. La continuité en 1 équivaut à $a+2 = 2$, soit $\boxed{a = 0}$.

Exercice 2

a. $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$. Le numérateur tend vers $5 > 0$; le dénominateur tend vers 0. Signe au voisinage de 1 : $x - 4 < 0$, donc $(x-1)(x-4) > 0$ si $x < 1$ et < 0 si $x > 1$. Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{2x+3}{x^2-5x+4} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{2x+3}{x^2-5x+4} = -\infty$: la fonction n'a pas de limite en 1, la droite $x = 1$ est asymptote verticale.

b. Pour $x < 0$, $\sqrt{x^2+3} = |x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} = -x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}$. Donc le dénominateur vaut $x\left(2 - \sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right)$ et $\dfrac{3x^2-2x}{2x+\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{x(3x-2)}{x\left(2-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right)} = \dfrac{3x-2}{2-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$. Le numérateur tend vers $-\infty$ et le dénominateur vers $2-1=1$: la limite vaut $-\infty$.

c. On factorise par x^2 : $\dfrac{x^2\left(5+\frac{6}{x}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = \dfrac{5+\frac{6}{x}}{\frac{1}{x^2}+1} \longrightarrow 5$.

d. Forme $\frac{0}{0}$. Quantité conjuguée : $\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \dfrac{(x+7)-9}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)} = \dfrac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+7}+3} \longrightarrow \dfrac{1}{6}$.

Exercice 3

1. a. $g'(x) = 3x^2 - 2x + 3$. Son discriminant vaut $\Delta = 4 - 36 = -32 < 0$ et son coefficient dominant est positif : $g'(x) > 0$ pour tout x. Donc g est **strictement croissante sur** $\mathbb{R}$. De plus $\lim_{-\infty} g = -\infty$ et $\lim_{+\infty} g = +\infty$ (terme dominant x^3).

   b. g est continue (polynôme) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de $-\infty$ vers $+\infty$; 0 appartient à cet intervalle image : d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet **une unique solution** α.

   c. $g(-1) = -1-1-3+1 = -4 < 0$ et $g(0) = 1 > 0$ donc $-1 < \alpha < 0$. Par balayage : $g(-0{,}30) \approx -0{,}017 < 0$ et $g(-0{,}29) \approx 0{,}021 > 0$, d'où $\boxed{-0{,}30 < \alpha < -0{,}29}$.

   d. g étant strictement croissante et s'annulant en α : $g(x) < 0$ sur $]-\infty;\alpha[$ et $g(x) > 0$ sur $]\alpha;+\infty[$.

2. a. $\dfrac{2}{x^2+1} \to 0$ en $\pm\infty$, donc $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{-\infty} f = -\infty$. (De plus $f(x) - x \to 0$: la droite $y = x$ est asymptote oblique.)

   b. $f(x) = x - 2 \times \dfrac{1}{x^2+1}$; avec $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ et $v = x^2+1$: $f'(x) = 1 - 2 \times \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} = 1 + \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(x^2+1)^2 + 4x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4+2x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$. Or $(x+1)g(x) = (x+1)(x^3 - x^2 + 3x + 1) = x^4 + 2x^2 + 4x + 1$ (développement). D'où $f'(x) = \dfrac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$.

   c. Le dénominateur est strictement positif : $f'(x)$ a le signe de $(x+1)g(x)$, avec $-1 < \alpha$.

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   f est donc croissante sur $]-\infty;-1]$, décroissante sur $[-1;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;+\infty[$, avec un maximum local $f(-1) = -1 - \dfrac{2}{2} = -2$ et un minimum local $f(\alpha) \approx -2{,}14$; $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Exercice 4

a. En $+\infty$ (forme $\infty - \infty$), quantité conjuguée : $u(x) = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \longrightarrow 0$. En $-\infty$: $\sqrt{x^2+1} \to +\infty$ et $-x \to +\infty$, donc $\lim_{-\infty} u = +\infty$. La courbe $\mathcal{C}$ admet donc l'axe des abscisses ($y = 0$) comme **asymptote horizontale en** $+\infty$.

b. $u(x) + 2x = \sqrt{x^2+1} + x = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$. En $-\infty$, le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $u(x) + 2x \to 0$: la droite d'équation $y = -2x$ est **asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en** $-\infty$.

c. $\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, donc $u'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{-u(x)}{\sqrt{x^2+1}}$. Or pour tout x, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant x$, donc $u(x) > 0$; ainsi $u'(x) < 0$: u est **strictement décroissante sur** $\mathbb{R}$ (de $+\infty$ vers 0).

Exercice 5

1. En 1, le numérateur tend vers $2 > 0$ et $x - 1 \to 0$, négatif à gauche, positif à droite : $\lim_{1^-} f = -\infty$ et $\lim_{1^+} f = +\infty$: la droite d'équation $x = 1$ est **asymptote verticale**.
2. $x + 1 + \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{(x+1)(x-1)+2}{x-1} = \dfrac{x^2-1+2}{x-1} = \dfrac{x^2+1}{x-1} = f(x)$.
3. $f(x) - (x+1) = \dfrac{2}{x-1} \longrightarrow 0$ quand $x \to +\infty$ et quand $x \to -\infty$.
4. La droite $\Delta : y = x + 1$ est donc **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Position : $\dfrac{2}{x-1} > 0 \iff x > 1$, donc $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de Δ sur $]1;+\infty[$ et **en dessous** sur $]-\infty;1[$.