Chapitre 2. Fiche d'exercices n°1 — Corrigé

Limites de fonctions et asymptotes

Série A ⋆ Automatismes

Corrigé — Exercice 1

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$ (puissance de x d'exposant positif). **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$: l'exposant 5 est impair, donc x^5 a le signe de x.
c. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$: quand x tend vers 0 par valeurs positives, $\dfrac{1}{x}$ est positif et devient aussi grand que l'on veut.
d. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$: x^2 tend vers 0 en restant strictement positif, que x soit positif ou négatif.
e. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. **f.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$: la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe de l'exponentielle en $-\infty$.

Corrigé — Exercice 2

Méthode. en $\pm\infty$, on factorise par le terme de plus haut degré.
Pour $x \neq 0$, $f(x) = x^3\left(-5 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{7}{x^3}\right)$. En $+\infty$ et en $-\infty$, $\dfrac{2}{x} \to 0$ et $\dfrac{7}{x^3} \to 0$, donc la parenthèse tend vers -5.
• En $+\infty$: $x^3 \to +\infty$ et la parenthèse tend vers $-5 < 0$, donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
• En $-\infty$: $x^3 \to -\infty$ et la parenthèse tend vers $-5 < 0$, donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
On retiendra : en $\pm\infty$, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré, ici $-5x^3$.

Corrigé — Exercice 3

Méthode. forme $\frac{\infty}{\infty}$: on factorise numérateur et dénominateur par leur terme de plus haut degré.
• $\dfrac{7x^2 - x}{2x^2 + 3} = \dfrac{x^2\left(7 - \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(2 + \frac{3}{x^2}\right)} = \dfrac{7 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x^2}}$. Le numérateur tend vers 7, le dénominateur vers 2 : la limite en $+\infty$ est $\dfrac{7}{2}$.
• $\dfrac{4x + 1}{x^3} = \dfrac{x\left(4 + \frac{1}{x}\right)}{x^3} = \dfrac{1}{x^2} \times \left(4 + \dfrac{1}{x}\right)$. Or $\dfrac{1}{x^2} \to 0$ et $4 + \dfrac{1}{x} \to 4$: la limite en $+\infty$ est 0.
• $\dfrac{x^3 - 1}{2x + 5} = \dfrac{x^3\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)}{x\left(2 + \frac{5}{x}\right)} = x^2 \times \dfrac{1 - \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{5}{x}}$. En $-\infty$, $x^2 \to +\infty$ et le quotient tend vers $\dfrac{1}{2} > 0$: la limite est $+\infty$.

Corrigé — Exercice 4

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$: la droite d'équation $y = -2$ est **asymptote horizontale** à la courbe de f en $+\infty$; la courbe s'en rapproche autant que l'on veut quand x devient grand.
• $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty$: la droite d'équation $x = 3$ est **asymptote verticale** à la courbe ; à droite de 3, la courbe « monte » le long de cette droite.

Corrigé — Exercice 5

Méthode. une forme $\frac{0}{0}$ en un réel a cache souvent un facteur $(x-a)$ commun, que l'on simplifie.

• En 4 : numérateur et dénominateur tendent vers 0. Pour $x \neq 4$, $\dfrac{x^2-16}{x-4} = \dfrac{(x-4)(x+4)}{x-4} = x+4$, donc $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4} = 8$.

• En -1 : $(-1)^2+3\times(-1)+2 = 0$, encore une forme $\frac{0}{0}$. Comme -1 est racine, $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$, et pour $x \neq -1$ le quotient vaut $x+2$. Donc $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x+1} = 1$.

Série B ⋆⋆ Entraînement

Corrigé — Exercice 6

a. Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \dfrac{3-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}$, qui tend vers $\dfrac{3}{1} = 3$ en $+\infty$ comme en $-\infty$.

La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. En -2 : le numérateur tend vers $3\times(-2)-1 = -7$ et le dénominateur vers 0. Il faut le signe de $x+2$:

- si $x < -2$, $x+2 < 0$: $\dfrac{(\text{proche de } -7)}{(\text{petit négatif})}$ est grand positif, donc $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = +\infty$;
- si $x > -2$, $x+2 > 0$: le quotient est grand négatif, donc $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = -\infty$.

La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe de f.

Corrigé — Exercice 7

On factorise le dénominateur : $x^2-9 = (x-3)(x+3)$, qui s'annule en 3 et en -3.

• **En 3.** Le numérateur tend vers $6 > 0$. Pour x proche de 3, $x+3$ est proche de $6 > 0$, donc x^2-9 a le signe de $x-3$: positif à droite de 3, négatif à gauche. Ainsi

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty.$$

La droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale.

• **En -3.** Le numérateur tend aussi vers 0 : forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Pour $x \neq \pm 3$,

$$f(x) = \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x-3}, \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to(-3)^+} f(x) = \lim_{x\to(-3)^-} f(x) = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}.$$

Commentaire. Une valeur interdite n'est pas toujours une asymptote verticale : en -3, la limite est finie. La courbe présente seulement un « trou » au point $\left(-3\,;-\frac{1}{6}\right)$, et la fonction se prolonge par continuité en posant $f(-3) = -\frac{1}{6}$.

Corrigé — Exercice 8

Méthode. forme $\infty - \infty$ avec des racines carrées : on multiplie et on divise par la quantité conjuguée.

• Pour $x > 0$, $\sqrt{x^2+4x}-x = \dfrac{\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)}{\sqrt{x^2+4x}+x} = \dfrac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x} = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$.

Comme $x > 0$, $\sqrt{x^2+4x} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)} = x\sqrt{1+\frac{4}{x}}$, d'où

$$\sqrt{x^2+4x}-x = \frac{4x}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)} = \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{4}{1+1} = 2.$$

• Pour $x \geqslant 1$, $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1} = \dfrac{(x+3)-(x-1)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}} = \dfrac{4}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}$. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc la limite est 0.

Corrigé — Exercice 9

• **Fonction f.** En $+\infty$: $3-x \to -\infty$ et $\mathrm{e}^x \to +\infty$, donc par produit $f(x) \to -\infty$.
En $-\infty$: forme $\infty \times 0$. On développe : $f(x) = 3\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x$. Or $\mathrm{e}^x \to 0$ et, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$: la droite $y=0$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

• **Fonction g.** En $-\infty$: $\mathrm{e}^x \to 0$, donc $g(x) \to \dfrac{0-1}{0+2} = -\dfrac{1}{2}$: asymptote $y = -\dfrac{1}{2}$ en $-\infty$.
En $+\infty$: forme $\frac{\infty}{\infty}$; on factorise par e^x : $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^x(1+2\mathrm{e}^{-x})} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+2\mathrm{e}^{-x}}$. Comme $\mathrm{e}^{-x} \to 0$, $g(x) \to 1$: asymptote $y=1$ en $+\infty$.

Corrigé — Exercice 10

Méthode. pour $\lim \mathrm{e}^{u(x)}$ ou $\lim \sqrt{u(x)}$, on cherche d'abord la limite L de $u(x)$, puis la limite de la fonction extérieure en L.
a. $u(x) = \dfrac{1-3x}{x} = \dfrac{1}{x} - 3 \to -3$ en $+\infty$, et $\lim\limits_{X\to-3} \mathrm{e}^X = \mathrm{e}^{-3}$. Donc la limite est e^{-3}.
b. $u(x) = \dfrac{9x^2+1}{x^2} = 9 + \dfrac{1}{x^2} \to 9$, et $\lim\limits_{X\to9} \sqrt{X} = 3$. Donc la limite est 3.
c. $u(x) = \dfrac{1}{x} \to -\infty$ quand $x \to 0^-$, et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$.

Corrigé — Exercice 11

Méthode. une fonction bornée (sin, cos) dans une limite : on encadre, puis on applique le théorème des gendarmes ou de comparaison.
• Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc $3x-1 \leqslant 3x+\sin x \leqslant 3x+1$. Pour $x>1$, $x-1>0$ et l'on peut diviser sans changer le sens :

$$\frac{3x-1}{x-1} \leqslant \frac{3x+\sin x}{x-1} \leqslant \frac{3x+1}{x-1}.$$

Les deux bornes tendent vers 3 en $+\infty$ (factoriser par x). D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+\sin x}{x-1} = 3$.
• $\cos x \leqslant 1$, donc $x^3 + 2\cos x \leqslant x^3+2$ pour tout x. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+2) = -\infty$; d'après le théorème de comparaison (une fonction majorée par une fonction qui tend vers $-\infty$ tend elle aussi vers $-\infty$), $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+2\cos x) = -\infty$.

Corrigé — Exercice 12

f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ car $x^2-1 = (x-1)(x+1)$.
• **En $\pm\infty$.** $f(x) = \dfrac{x^2\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} \to 2$: la droite $y=2$ est asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.
• **En 1.** Le numérateur tend vers $2+1=3>0$. Le signe de x^2-1 est donné par le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$: asymptote verticale $x=1$.
• **En -1.** Le numérateur tend vers $2-1=1>0$; à gauche de -1, $x^2-1>0$, à droite $x^2-1<0$. Donc $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$: asymptote verticale $x=-1$.
Bilan : trois asymptotes, d'équations $y=2$, $x=1$ et $x=-1$.

Série C ⋆⋆⋆ Type bac

Corrigé — Exercice 13

a. En $-\infty$: $-x \to +\infty$, donc $e^{-x} \to +\infty$ et $2+3e^{-x} \to +\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

En $+\infty$: $e^{-x} \to 0$, donc $2+3e^{-x} \to 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{5}{2}$.

La courbe admet deux asymptotes horizontales : $y = 0$ en $-\infty$ et $y = \dfrac{5}{2}$ en $+\infty$.

b. Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$, donc $2+3e^{-x} > 2 > 0$. Le quotient de deux nombres positifs est positif : $f(x) > 0$. Et comme $2+3e^{-x} > 2$, on a $\dfrac{5}{2+3e^{-x}} < \dfrac{5}{2}$ (la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$).

Donc $0 < f(x) < \dfrac{5}{2}$.

c. $f = \dfrac{5}{u}$ avec $u(x) = 2+3e^{-x}$, $u'(x) = -3e^{-x}$. Donc

$$f'(x) = -\frac{5u'(x)}{u(x)^2} = \frac{15\,e^{-x}}{(2+3e^{-x})^2}.$$

Numérateur et dénominateur sont strictement positifs : $f'(x) > 0$, et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de 0 (en $-\infty$) à $\dfrac{5}{2}$ (en $+\infty$).

Corrigé — Exercice 14

a. Pour $x \neq 2$, $ax+b+\dfrac{c}{x-2} = \dfrac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2} = \dfrac{ax^2+(b-2a)x+(c-2b)}{x-2}$.

Par identification avec $2x^2-3x+1$: $a = 2$; $b-2a = -3$, d'où $b = 1$; $c-2b = 1$, d'où $c = 3$. Ainsi

$$f(x) = 2x+1+\frac{3}{x-2}.$$

b. Asymptote oblique. $f(x)-(2x+1) = \dfrac{3}{x-2} \to 0$ en $+\infty$ et en $-\infty$: la droite Δ d'équation $y = 2x+1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.

Asymptote verticale. En 2, le numérateur $2x^2-3x+1$ tend vers $3 > 0$; $x-2 < 0$ à gauche et $x-2 > 0$ à droite, donc $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$: la droite $x = 2$ est asymptote verticale.

Position relative. $f(x)-(2x+1) = \dfrac{3}{x-2}$ a le signe de $x-2$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ sur $]2\,;+\infty[$ et en dessous sur $]-\infty\,;2[$.

Corrigé — Exercice 15

a. En $-\infty$: $x^2 \to +\infty$ et $e^{-x} \to +\infty$, donc $f(x) \to +\infty$.

En $+\infty$: forme $\infty\times0$. On écrit $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$; par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

La droite $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$.

b. Dérivée d'un produit : $f'(x) = 2x\,e^{-x}+x^2\times(-e^{-x}) = x(2-x)e^{-x}$. Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $x(2-x)$: négatif sur $]-\infty\,;0[$, positif sur $]0\,;2[$, négatif sur $]2\,;+\infty[$. Avec $f(0) = 0$ et $f(2) = 4e^{-2} \approx 0{,}54$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘	0

Corrigé — Exercice 16

a. Pour $x > 0$, $\dfrac{2x-1}{x} = 2 - \dfrac{1}{x}$. De $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et $x > 0$ on tire $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$. En ajoutant $2 - \dfrac{1}{x}$:

$$2 - \frac{2}{x} \leqslant f(x) \leqslant 2.$$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{2}{x}\right) = 2$ et la borne supérieure vaut 2. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$: la droite $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$ (la courbe reste en dessous et oscille en s'en rapprochant).

Série D ⋆ ⋆ ⋆⋆ Approfondissement

Corrigé — Exercice 17

a. En $-\infty$: $\mathrm{e}^{2x} \to 0$, donc $f(x) \to \dfrac{0-1}{0+1} = -1$.
En $+\infty$: forme $\frac{\infty}{\infty}$; on factorise par e^{2x} (calcul détaillé en c.) et l'on obtient $f(x) \to 1$.
Asymptotes horizontales : $y = -1$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$.

b. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, et pour tout réel x, $f(-x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}-1}{\mathrm{e}^{-2x}+1}$. On multiplie numérateur et dénominateur par e^{2x} : $f(-x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}} = -\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} = -f(x)$. La fonction f est impaire : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

c. En multipliant numérateur et dénominateur par e^{-2x} : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$. En $+\infty$, $\mathrm{e}^{-2x} \to 0$, d'où $f(x) \to \dfrac{1}{1} = 1$. (La symétrie de b. redonne alors la limite -1 en $-\infty$.)

Corrigé — Exercice 18

Forme $\infty - \infty$. Par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = \frac{(x^2+x)-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}.$$

Attention au signe : $\sqrt{x^2} = |x|$, donc $\sqrt{x^2 \pm x} = |x|\sqrt{1 \pm \frac{1}{x}}$.

• En $+\infty$ ($|x| = x$) : l'expression vaut $\dfrac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \to \dfrac{2}{1+1} = 1.$

• En $-\infty$ ($|x| = -x$) : elle vaut $\dfrac{2x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} = \dfrac{-2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \to -1.$

Corrigé — Exercice 19

a. En 0^+, forme $\frac{0}{0}$. On fait apparaître le taux d'accroissement de l'exponentielle en 0 :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}}.$$

Quand $x \to 0^+$, $\mathrm{e}^x \to 1$ et $\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} \to 1$ (nombre dérivé de exp en 0). Donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \dfrac{1}{1} = 1$.

b. En $+\infty$, on divise numérateur et dénominateur par e^x : $f(x) = \dfrac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}}$. Le dénominateur tend vers 1 et $x \to +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Pour aller plus loin : $f(x) - x = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \to 0$ en $+\infty$ (croissance comparée) ; la droite $y = x$ est asymptote oblique.

Corrigé — Exercice 20

a. En $+\infty$: $x \to +\infty$ et $\sqrt{x^2+1} \to +\infty$, donc $f(x) \to +\infty$.
En $-\infty$: forme $-\infty + \infty$. Quantité conjuguée :

$$f(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}{\sqrt{x^2+1} - x} = \frac{(x^2+1) - x^2}{\sqrt{x^2+1} - x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x}.$$

En $-\infty$, $\sqrt{x^2+1} \to +\infty$ et $-x \to +\infty$: le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ (asymptote $y = 0$ en $-\infty$).

b. $f(x) - 2x = \sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{(x^2+1) - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$. En $+\infty$, le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $f(x) - 2x \to 0$: la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
Pour $x > 0$, $\sqrt{x^2+1} + x > 0$, donc $f(x) - 2x > 0$: la courbe est **au-dessus** de son asymptote.