Chapitre 3. Fiche d'exercices n°1 — Corrigé

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Série A ⋆ Automatismes

Corrigé — Exercice 1

a. Faux. Contre-exemple : la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas dérivable en 0 (la courbe y présente un point anguleux).
b. Vrai. C'est un théorème du cours : une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle. (La réciproque est fausse, voir a.)
c. Vrai. $f(a)f(b) < 0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, donc 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Comme f est continue sur $[a\,;b]$, le théorème des valeurs intermédiaires donne au moins un réel c de $]a\,;b[$ tel que $f(c) = 0$.
d. Vrai. Si f est strictement monotone, deux réels distincts ont des images distinctes : l'équation $f(x) = k$ ne peut pas avoir deux solutions. Attention : elle peut n'en avoir *aucune* si k n'est pas compris entre $f(a)$ et $f(b)$; c'est pourquoi l'énoncé dit « au plus une ».

Corrigé — Exercice 2

Sur $]-\infty\,;2[$, $f(x) = 3x - 1$ et sur $]2\,;+\infty[$, $f(x) = x^2 + a$: ce sont des polynômes, donc f est continue sur chacun de ces intervalles. Il reste à étudier le point 2.
• $f(2) = 3 \times 2 - 1 = 5$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3x - 1) = 5$.
• $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(x^2 + a\right) = 4 + a$.
f est continue en 2 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$, c'est-à-dire $4 + a = 5$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = 1$.

Corrigé — Exercice 3

f est continue et strictement croissante sur $[0\,;5]$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout k compris entre $f(0) = -3$ et $f(5) = 7$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[0\,;5]$.
• $2 \in [-3\,;7]$: l'équation $f(x) = 2$ admet **exactement une** solution.
• f étant croissante, $f(x) \leqslant f(5) = 7$ pour tout $x \in [0\,;5]$; donc $f(x) = 9$ n'a **aucune** solution sur $[0\,;5]$.

Corrigé — Exercice 4

$g(1) = 1 + 1 - 3 = -1 < 0$ et $g(2) = 8 + 2 - 3 = 7 > 0$. La fonction g est continue sur $[1\,;2]$ (c'est un polynôme) et 0 est compris entre $g(1)$ et $g(2)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $c \in]1\,;2[$ tel que $g(c) = 0$.
(Comme $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, g est même strictement croissante : cette solution est unique.)

Série B ⋆⋆ Entraînement

Corrigé — Exercice 5

a. $f'(x) = 3x^2 - 6 = 3\left(x^2 - 2\right) = 3\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$, positive à l'extérieur des racines $\pm\sqrt{2}$ et négative entre elles.
$f\left(-\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 2 = 2 + 4\sqrt{2} \approx 7{,}66$ et $f\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 2 = 2 - 4\sqrt{2} \approx -3{,}66$.
Limites : en $\pm\infty$, $f(x)$ a la même limite que x^3, soit $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$2+4\sqrt{2}$	↘	$2-4\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

b. On applique le corollaire du TVI sur chaque intervalle où f est continue et strictement monotone :
- sur $]-\infty\,;-\sqrt{2}]$, f croît strictement de $-\infty$ à $2+4\sqrt{2} > 0$: une unique solution x_1 ;
- sur $[-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}]$, f décroît strictement de $2+4\sqrt{2} > 0$ à $2-4\sqrt{2} < 0$: une unique solution x_2 ;
- sur $[\sqrt{2}\,;+\infty[$, f croît strictement de $2-4\sqrt{2} < 0$ à $+\infty$: une unique solution x_3.

L'équation $f(x) = 0$ admet donc exactement **trois** solutions sur $\mathbb{R}$.
c. Par balayage à la calculatrice (pas 0,1), on cherche les changements de signe :

x	$-2{,}7$	$-2{,}6$	$0{,}3$	$0{,}4$	$2{,}2$	$2{,}3$
$f(x) \approx$	$-1{,}48$	$0{,}02$	$0{,}23$	$-0{,}34$	$-0{,}55$	$0{,}37$

D'où $-2{,}7 < x_1 < -2{,}6$, $0{,}3 < x_2 < 0{,}4$ et $2{,}2 < x_3 < 2{,}3$.

Corrigé — Exercice 6

Existence et unicité. $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ pour tout réel x : f est continue (polynôme) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (terme dominant x^3). Comme 0 est compris entre ces limites, le corollaire du TVI assure que $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
Encadrement. $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 9 > 0$ donc $1 < \alpha < 2$. Au pas 0,1 : $f(1{,}1) \approx -0{,}37$ et $f(1{,}2) \approx 0{,}33$, donc $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$. Au pas 0,01 : $f(1{,}15) \approx -0{,}029 < 0$ et $f(1{,}16) \approx 0{,}041 > 0$. Donc

$$1{,}15 < \alpha < 1{,}16.$$

Corrigé — Exercice 7

a. f est la somme de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et de $x \mapsto x$, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$; elle l'est donc aussi, et $f'(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
b. En $-\infty$: $\mathrm{e}^x \to 0$ et $x \to -\infty$, donc $f(x) \to -\infty$. En $+\infty$: $\mathrm{e}^x \to +\infty$ et $x \to +\infty$, donc $f(x) \to +\infty$.
c. f est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de $-\infty$ à $+\infty$: d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.
$f(-1) = \mathrm{e}^{-1} - 1 \approx -0{,}63 < 0$ et $f(0) = 1 > 0$, donc $-1 < \alpha < 0$. En affinant : $f(-0{,}57) \approx -0{,}005 < 0$ et $f(-0{,}56) \approx 0{,}011 > 0$, d'où $-0{,}57 < \alpha < -0{,}56$.

Corrigé — Exercice 8

a. f est définie pour $x \geqslant -4$ et $x \neq 0$. En 0, numérateur et dénominateur tendent vers 0 : forme indéterminée. On multiplie par la quantité conjuguée :

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x+4} - 2\right)\left(\sqrt{x+4} + 2\right)}{x\left(\sqrt{x+4} + 2\right)} = \frac{(x+4) - 4}{x\left(\sqrt{x+4} + 2\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2}.$$

Cette dernière expression est continue en 0, donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4}+2} = \dfrac{1}{4}$.

b. On définit $\tilde{f}$ par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \neq 0$ et $\tilde{f}(0) = \dfrac{1}{4}$. Alors $\lim\limits_{x\to 0} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(0)$: $\tilde{f}$ est continue en 0. C'est le **prolongement par continuité** de f en 0.

Corrigé — Exercice 9

```
def dicho(a, b, e):
    while b - a > e:
        m = (a + b) / 2
        if f(m) < 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return a, b
```

Principe. Au départ $f(a) < 0 < f(b)$. On calcule le milieu m de $[a\,;b]$:
• si $f(m) < 0$, le changement de signe a lieu entre m et b : on remplace a par m ;
• sinon, $f(m) \geqslant 0$ et il a lieu entre a et m : on remplace b par m.
À chaque tour, la solution reste dans $[a\,;b]$ et l'amplitude est divisée par 2. La boucle s'arrête dès que $b - a \leqslant e$.

Corrigé — Exercice 10

L'intervalle de départ a pour amplitude $2 - 1 = 1$, et chaque étape divise l'amplitude par 2 : après n étapes, elle vaut $\dfrac{1}{2^n}$.
On veut $\dfrac{1}{2^n} < 10^{-3}$, c'est-à-dire $2^n > 1000$. Or $2^9 = 512 < 1000$ et $2^{10} = 1024 > 1000$, et la suite (2^n) est croissante. Il faut donc **10 étapes**.

Série C ⋆⋆⋆ Type bac

Corrigé — Exercice 11

a. $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$, du signe de $1 - x$ car $\mathrm{e}^{-x} > 0$. $f(0) = 0$, $f(1) = \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$ et, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	e^{-1}	↘	0

b. $0{,}2 < \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$.
- Sur $[0\,;1]$: f est continue et strictement croissante de 0 à e^{-1}, et $0{,}2 \in \left[0\,;\mathrm{e}^{-1}\right]$: une unique solution x_1.
- Sur $[1\,;+\infty[$: f est continue et strictement décroissante de e^{-1} vers 0 (limite non atteinte), et $0{,}2 \in \left]0\,;\mathrm{e}^{-1}\right]$: une unique solution x_2.

L'équation $f(x) = 0{,}2$ admet donc exactement **deux** solutions sur $[0\,;+\infty[$.
c. $f(0{,}2) \approx 0{,}164 < 0{,}2 < f(0{,}3) \approx 0{,}222$, donc $0{,}2 < x_1 < 0{,}3$. $f(2{,}5) \approx 0{,}205 > 0{,}2 > f(2{,}6) \approx 0{,}193$, donc $2{,}5 < x_2 < 2{,}6$.

Corrigé — Exercice 12

a. La suite (u_n) est croissante et majorée par 4 : d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ. De plus, $u_0 \leqslant u_n \leqslant 4$ pour tout n, donc $0 \leqslant \ell \leqslant 4$.
b. Posons $g(x) = \sqrt{3x+4}$, définie et continue sur $\left[-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$, de sorte que $u_{n+1} = g(u_n)$.
Quand $n \to +\infty$: $u_{n+1} \to \ell$, et comme g est continue en ℓ, $g(u_n) \to g(\ell)$. Par unicité de la limite, $\ell = g(\ell)$, soit $\ell = \sqrt{3\ell+4}$.
En élevant au carré ($\ell \geqslant 0$) : $\ell^2 = 3\ell + 4$, soit $\ell^2 - 3\ell - 4 = 0$, c'est-à-dire $(\ell-4)(\ell+1) = 0$. Donc $\ell = 4$ ou $\ell = -1$; comme $\ell \geqslant 0$, on conclut : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

Corrigé — Exercice 13

a. $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6\left(x^2 - x - 2\right) = 6(x+1)(x-2)$: positive sur $[-3\,;-1[$, négative sur $]-1\,;2[$, positive sur $]2\,;4]$.
$f(-3) = -54 - 27 + 36 + 5 = -40$; $f(-1) = -2 - 3 + 12 + 5 = 12$; $f(2) = 16 - 12 - 24 + 5 = -15$; $f(4) = 128 - 48 - 48 + 5 = 37$.

x	-3		-1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-40	↗	12	↘	-15	↗	37

b. Sur chaque intervalle, f est continue (polynôme) et strictement monotone, et 0 est compris entre les valeurs aux bornes :
- sur $[-3\,;-1]$: de -40 à 12, une unique solution (vers $-2{,}04$) ;
- sur $[-1\,;2]$: de 12 à -15, une unique solution (vers 0,39) ;
- sur $[2\,;4]$: de -15 à 37, une unique solution (vers 3,15).

L'équation $f(x) = 0$ admet donc exactement **trois** solutions sur $[-3\,;4]$.

Corrigé — Exercice 14

f est un polynôme, donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$. Comme $x^4 \geqslant 0$ et $x^2 \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 1 > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
En $\pm\infty$, $f(x)$ a la même limite que x^5 : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Soit k un réel quelconque. k est compris entre $-\infty$ et $+\infty$; d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (version avec limites), l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Série D ⋆ ⋆ ⋆⋆ Approfondissement

Corrigé — Exercice 15

a. f_n est un polynôme, continu et dérivable sur $[0\,;1]$, et $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 \geqslant 1 > 0$: f_n est strictement croissante. $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = 1 + 1 - 1 = 1 > 0$. D'après le corollaire du TVI, $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $[0\,;1]$, et même dans $]0\,;1[$ puisque $f_n(0) \neq 0$ et $f_n(1) \neq 0$.

b. $n = 1$: $f_1(x) = 2x - 1$, donc $\alpha_1 = \dfrac{1}{2}$.

$n = 2$: $x^2 + x - 1 = 0$, $\Delta = 5$, racines $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; seule $\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618$ est dans $[0\,;1]$: $\alpha_2 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

c. Par définition, $f_n(\alpha_n) = \alpha_n^n + \alpha_n - 1 = 0$, donc $\alpha_n - 1 = -\alpha_n^n$. Alors

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^{n+1} + \alpha_n - 1 = \alpha_n^{n+1} - \alpha_n^n = \alpha_n^n\,(\alpha_n - 1)\,.$$

Comme $0 < \alpha_n < 1$, $\alpha_n^n > 0$ et $\alpha_n - 1 < 0$: $f_{n+1}(\alpha_n) < 0 = f_{n+1}(\alpha_{n+1})$.
f_{n+1} étant strictement croissante sur $[0\,;1]$, on en déduit $\alpha_n < \alpha_{n+1}$: la suite (α_n) est (strictement) croissante.

d. (α_n) est croissante et majorée par 1 : elle converge vers un réel $\ell \leqslant 1$ (théorème de convergence monotone).
Pour aller plus loin : $\ell = 1$. Supposons $\ell < 1$. Comme la suite est croissante, $0 < \alpha_n \leqslant \ell$, donc $0 < \alpha_n^n \leqslant \ell^n$; or $\ell^n \to 0$ car $0 \leqslant \ell < 1$, donc $\alpha_n^n \to 0$ et $\alpha_n = 1 - \alpha_n^n \to 1$, ce qui contredit $\ell < 1$.

Corrigé — Exercice 16

La fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $[0\,;1]$ (différence de deux fonctions continues), et

$$g(0) = f(0) - 0 = 0 \qquad \text{et} \qquad g(1) = f(1) - 1 = 0.$$

Ainsi 0 et 1 sont *toujours* solutions de l'équation $f(x) = x$, quelle que soit la valeur de $f\left(\frac{1}{2}\right)$: l'équation admet au moins une solution dans $[0\,;1]$ (ici, au moins deux).
Remarque. Avec ces hypothèses, l'hypothèse $f\left(\frac{1}{2}\right) \neq \frac{1}{2}$ ne sert pas. L'exercice devient intéressant si l'on suppose par exemple $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$: alors $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = -1 < 0$, et c'est le théorème des valeurs intermédiaires qui fournit une solution de $f(x) = x$ dans $]0\,;1[$.

Corrigé — Exercice 17

f est à valeurs dans $[0\,;1]$, donc $0 \leqslant f(0) \leqslant 1$ et $0 \leqslant f(1) \leqslant 1$. Par conséquent

$$h(0) = f(0) - 0 = f(0) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad h(1) = f(1) - 1 \leqslant 0.$$

La fonction h est continue sur $[0\,;1]$ (différence de fonctions continues) et 0 est compris entre $h(1)$ et $h(0)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0\,;1]$ tel que $h(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$.
Interprétation : la courbe de toute fonction continue de $[0\,;1]$ dans $[0\,;1]$ coupe la droite d'équation $y = x$; un tel réel c s'appelle un **point fixe** de f.

Corrigé — Exercice 18

a. $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$: négative si $x < 0$ (car $\mathrm{e}^x < 1$), nulle en 0, positive si $x > 0$. Minimum $f(0) = 1 - 0 - 2 = -1$.
En $-\infty$: $\mathrm{e}^x \to 0$ et $-x - 2 \to +\infty$, donc $f(x) \to +\infty$.
En $+\infty$: forme $\infty - \infty$; $f(x) = \mathrm{e}^x\left(1 - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{2}{\mathrm{e}^x}\right)$ avec $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \to 0$ (croissance comparée) et $\dfrac{2}{\mathrm{e}^x} \to 0$, donc $f(x) \to +\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

b. Sur $]-\infty\,;0]$, f est continue et strictement décroissante de $+\infty$ à $-1 < 0$: une unique solution α, et $\alpha < 0$ car $f(0) \neq 0$. Sur $[0\,;+\infty[$, f est continue et strictement croissante de -1 à $+\infty$: une unique solution $\beta > 0$. Il y a donc exactement deux solutions, $\alpha < 0 < \beta$ (on trouve $\alpha \approx -1{,}84$ et $\beta \approx 1{,}15$).

c.

```
from math import exp

def f(x):
    return exp(x) - x - 2

def encadrement_beta():
    a, b = 0, 2      # f(0) < 0 < f(2)
    while b - a > 0.001:
        m = (a + b) / 2
        if f(m) < 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return a, b
```

On part de $[0\,;2]$: $f(0) = -1 < 0$ et $f(2) = \mathrm{e}^2 - 4 \approx 3{,}39 > 0$, et f est strictement croissante sur cet intervalle, donc $\beta \in]0\,;2[$.
C'est l'algorithme de dichotomie de l'exercice 9 : la fonction renvoie un intervalle $[a\,;b]$ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-3} qui contient β (on obtient $a \approx 1{,}1455$ et $b \approx 1{,}1465$, donc $\beta \approx 1{,}146$).