Chapitre 1. Nombres et calcul algébrique

Devoir surveillé n°1 — Corrigé

Ensembles de nombres · fractions · puissances · racines carrées · arithmétique · calcul littéral

Durée : 1 heure — calculatrice autorisée

Corrigé — Exercice 1

1. Réponse c. $\frac{9}{4} = 2{,}25$ est décimal et non entier ; $\frac{7}{3}$ n'est pas décimal, $\frac{15}{5} = 3$ est entier, $\sqrt{2}$ est irrationnel. *(1 pt)*

2. Réponse b. $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8+3}{12} = \frac{11}{12}$ et $\frac{11}{12} \div \frac{11}{6} = \frac{11}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{1}{2}$. *(1 pt)*

3. Réponse c. $0{,}000\,56 \times 10^3 = 0{,}56 = 5{,}6 \times 10^{-1}$. *(1 pt)*

4. Réponse b. $\sqrt{75} - \sqrt{12} = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$. *(1 pt)*

5. Réponse d. $(x-2)^2 = 9 \iff x - 2 = 3$ ou $x - 2 = -3 \iff x = 5$ ou $x = -1$. *(1 pt)*

Corrigé — Exercice 2

1. $A = 2 - \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} + \frac{1}{6} = 2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{12}{6} - \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ (la multiplication est prioritaire). $B = \left(\frac{10}{6} - \frac{3}{6}\right) \div \frac{7}{4} = \frac{7}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. *(2 pts)*

2. $C = \dfrac{3 \times 5}{6} \times \dfrac{10^{-4} \times 10^7}{10^2} = 2{,}5 \times 10^1 = 25$. *(1 pt)*

Corrigé — Exercice 3

1. $E = \sqrt{16 \times 3} + 2\sqrt{9 \times 3} - \sqrt{25 \times 3} = 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$. $F = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 1^2 = 12 - 1 = 11$ (identité $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$). *(2 pts)*

2. On multiplie numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée $\sqrt{7}+2$: $H = \dfrac{6\left(\sqrt{7}+2\right)}{\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)} = \dfrac{6\left(\sqrt{7}+2\right)}{7-4} = \dfrac{6\left(\sqrt{7}+2\right)}{3} = 2\sqrt{7}+4$. *(1 pt)*

Corrigé — Exercice 4

1. $(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$ et $(x+4)(3x-2) = 3x^2 - 2x + 12x - 8 = 3x^2 + 10x - 8$, donc $f(x) = 9x^2 - 12x + 4 - 3x^2 - 10x + 8 = 6x^2 - 22x + 12$. *(1 pt)*

2. Facteur commun $(3x-2)$: $f(x) = (3x-2)\left[(3x-2) - (x+4)\right] = (3x-2)(2x-6) = 2(3x-2)(x-3)$. *(1 pt)*

3. a. Forme développée : $f(0) = 12$ (ou forme factorisée : $2 \times (-2) \times (-3) = 12$). *(0,5 pt)*

b. Forme développée : $f\left(\sqrt{2}\right) = 6 \times 2 - 22\sqrt{2} + 12 = 24 - 22\sqrt{2}$. *(0,5 pt)*

c. Forme factorisée, équation produit nul : $2(3x-2)(x-3) = 0 \iff 3x - 2 = 0$ ou $x - 3 = 0 \iff x = \frac{2}{3}$ ou $x = 3$. $\mathcal{S} = \left\{\frac{2}{3}\,;3\right\}$. *(1 pt)*

d. Forme développée : $f(x) = 12 \iff 6x^2 - 22x = 0 \iff 2x(3x-11) = 0 \iff x = 0$ ou $x = \frac{11}{3}$. $\mathcal{S} = \left\{0\,;\frac{11}{3}\right\}$. *(1 pt)*

Corrigé — Exercice 5

1. $14^2 = 196 < 221 < 225 = 15^2$: il suffit de tester les nombres premiers inférieurs ou égaux à 14, soit 2, 3, 5, 7, 11, 13. 221 est impair, sa somme des chiffres 5 n'est pas multiple de 3, il ne finit ni par 0 ni par 5, $221 = 7 \times 31 + 4$, $221 = 11 \times 20 + 1$, mais $221 = 13 \times 17$: 221 **n'est pas premier**. Pour 223 (même borne) : $223 = 7 \times 31 + 6$, $223 = 11 \times 20 + 3$, $223 = 13 \times 17 + 2$, et les divisibilités par 2, 3, 5 échouent : 223 **est premier**. *(1,5 pt)*

2. $360 = 2 \times 180 = 2^2 \times 90 = 2^3 \times 45 = 2^3 \times 3^2 \times 5$; $756 = 2 \times 378 = 2^2 \times 189 = 2^2 \times 3^3 \times 7$. *(1 pt)*

3. Le PGCD est le produit des facteurs premiers communs affectés du plus petit exposant : $\text{PGCD}(360\,;756) = 2^2 \times 3^2 = 36$. Donc $\dfrac{360}{756} = \dfrac{360 \div 36}{756 \div 36} = \dfrac{10}{21}$, fraction irréductible. *(1,5 pt)*

Corrigé détaillé

Corrigé — Exercice 1

1. Vrai : tout $n \in \mathbb{Z}$ s'écrit $\dfrac{n}{1}$, quotient d'entiers, donc $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
2. Vrai : $\dfrac{42}{14} = 3 \in \mathbb{N}$ — une écriture fractionnaire peut représenter un entier.
3. Faux : pour $a = 9$ et $b = 16$, $\sqrt{25} = 5$ alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$.
4. Vrai : la contraposée de « si P alors Q » est « si non Q alors non P » — c'est bien l'énoncé proposé.

Corrigé — Exercice 2

1. $\dfrac{7}{6} \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, donc $A = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$. *(La multiplication prime sur la soustraction.)*
2. $B = 10^{3-7-(-2)} = 10^{3-7+2} = 10^{-2}$.
3. $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$, donc $C = 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.
4. $D = 15 \times 10^4 = 1{,}5 \times 10^5$. *(On ajuste pour obtenir $1 \leqslant a < 10$.)*

Corrigé — Exercice 3

1. $E = 9x^2 - 12x + 4$. $\quad F = (x^2 + 8x + 16) - (x^2 - 1) = 8x + 17$.
2. $G = (x - 5)(x + 5)$. $\quad H = (x + 4)^2$.
3. $(x + 2)(2x - 5) = 0 \iff x = -2$ ou $x = \dfrac{5}{2}$: $S = \left\{-2\,;\dfrac{5}{2}\right\}$. $\quad x^2 = 16 \iff x = \pm 4$: $S = \{-4\,;4\}$.

Corrigé — Exercice 4

1. Augmenter de 25 %, c'est multiplier par $1 + \dfrac{25}{100} = 1{,}25$: le prix passe à $80 \times 1{,}25 = 100$ €.
2. Baisser de 20 %, c'est multiplier par $1 - \dfrac{20}{100} = 0{,}80$: le prix passe à $100 \times 0{,}8 = 80$ €.
3. Coefficient global : $1{,}25 \times 0{,}8 = 1$. Le prix final est égal au prix initial : les deux évolutions se compensent exactement.
4. Les pourcentages d'évolution ne s'ajoutent pas : ils se traduisent par des *multiplications*. Le vendeur additionne $+25$ et -20 ; or la baisse de 20 % s'applique au nouveau prix (100 €), pas à l'ancien — d'où un retour exact à 80 €, et non $+5$ %.