Chapitre 1. Fiche d'exercices n°1 — Corrigé

Nombres et calcul algébrique

Série A ⋆ Automatismes

Corrigé — Exercice 1

Méthode. pour ajouter ou soustraire, on réduit au même dénominateur ; pour multiplier, on simplifie avant de calculer ; diviser, c'est multiplier par l'inverse.

a. Le plus petit dénominateur commun de 4 et 6 est 12 : $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6}=\dfrac{3\times3}{4\times3}+\dfrac{5\times2}{6\times2}=\dfrac{9}{12}+\dfrac{10}{12}=\dfrac{19}{12}$ (irréductible : 19 est premier et ne divise pas 12).

b. $\dfrac{7}{12}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{12}-\dfrac{4}{12}=\dfrac{3}{12}=\dfrac{3\times1}{3\times4}=\dfrac{1}{4}$.

c. $\dfrac{3}{5}\times\dfrac{10}{21}=\dfrac{3\times10}{5\times21}=\dfrac{3\times2\times5}{5\times3\times7}=\dfrac{2}{7}$: on a simplifié par 3 et par 5 avant de multiplier.

d. $\dfrac{2}{3}\div\dfrac{5}{9}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{9}{5}=\dfrac{2\times9}{3\times5}=\dfrac{2\times3\times3}{3\times5}=\dfrac{6}{5}$.

Corrigé — Exercice 2

Méthode. $a^m\times a^n=a^{m+n}$, $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$, $(a^m)^n=a^{mn}$, $(ab)^n=a^nb^n$, $a^0=1$, $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ (pour $a\neq0$).

a. $2^3\times2^5=2^{3+5}=2^8$. **b.** $10^{-3}\times10^7=10^{-3+7}=10^4$. **c.** $\left(5^2\right)^3=5^{2\times3}=5^6$.

d. $\dfrac{3^4}{3^6}=3^{4-6}=3^{-2}=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}$. **e.** $\left(2\times10^3\right)^2=2^2\times\left(10^3\right)^2=4\times10^6$. **f.** $7^0=1$.

Corrigé — Exercice 3

Méthode. on fait apparaître dans la racine le plus grand carré parfait possible, puis on utilise $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ pour $a,b\geqslant0$.

a. $\sqrt{50}=\sqrt{25\times2}=\sqrt{25}\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$.

b. $\sqrt{18}+\sqrt{8}=\sqrt{9\times2}+\sqrt{4\times2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ (on ajoute des « $\sqrt{2}$ » comme on ajouterait des x).

c. $\sqrt{12}\times\sqrt{3}=\sqrt{12\times3}=\sqrt{36}=6$. **d.** $\left(\sqrt{5}\right)^2=5$ (définition de la racine carrée).

e. $\sqrt{49\times4}=\sqrt{49}\times\sqrt{4}=7\times2=14$. **f.** $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{72}{2}}=\sqrt{36}=6$.

Attention : $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ en général ; par exemple $\sqrt{9+16}=5$ alors que $\sqrt{9}+\sqrt{16}=7$.

Corrigé — Exercice 4

Méthode. la notation scientifique est $a\times10^n$ avec $1\leqslant a<10$ et n entier relatif.

- $385\,000=3{,}85\times100\,000=3{,}85\times10^5$ (on a décalé la virgule de 5 rangs vers la gauche).
- $0{,}000\,42=4{,}2\times0{,}000\,1=4{,}2\times10^{-4}$.
- $(3\times10^4)\times(2\times10^{-7})=(3\times2)\times10^{4+(-7)}=6\times10^{-3}$, déjà en notation scientifique car $1\leqslant6<10$.

Corrigé — Exercice 5

Méthode. identités remarquables : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$; $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

a. $(x+3)^2=x^2+2\times x\times3+3^2=x^2+6x+9$.

b. $(2x-5)^2=(2x)^2-2\times2x\times5+5^2=4x^2-20x+25$. Attention : $(2x)^2=4x^2$, et non $2x^2$.

c. $(3x+2)(3x-2)=(3x)^2-2^2=9x^2-4$.

Corrigé — Exercice 6

Méthode. on reconnaît la forme développée d'une identité remarquable, puis on l'écrit sous forme de produit.
a. $x^2-16=x^2-4^2=(x-4)(x+4)$ (forme a^2-b^2 avec $a=x$, $b=4$).
b. $x^2+10x+25=x^2+2\times x\times 5+5^2=(x+5)^2$.
c. $9x^2-12x+4=(3x)^2-2\times 3x\times 2+2^2=(3x-2)^2$. On vérifie le double produit : $2\times 3x\times 2=12x$.

Corrigé — Exercice 7

• $-5\notin\mathbb{N}$: $\mathbb{N}$ ne contient que les entiers positifs ou nuls. • $-5\in\mathbb{Z}$.
• $\dfrac{2}{3}\notin\mathbb{D}$: son écriture décimale 0,666… est illimitée ; on ne peut pas l'écrire $\dfrac{a}{10^n}$ avec a entier.
• $3{,}14\in\mathbb{D}$ car $3{,}14=\dfrac{314}{100}=\dfrac{314}{10^2}$. • $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$: $\sqrt{2}$ est irrationnel (résultat du cours).
• $\dfrac{28}{7}=4\in\mathbb{N}$: une écriture fractionnaire peut désigner un entier naturel.
Rappel : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

Série B ⋆⋆ Entraînement

Corrigé — Exercice 8

On calcule séparément le numérateur et le dénominateur.
Numérateur : $2-\dfrac{3}{4}=\dfrac{8}{4}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{4}$. Dénominateur : $1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

$$A=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{5\times 2}{4\times 3}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}.$$

Corrigé — Exercice 9

• On simplifie chaque racine : $\sqrt{75}=\sqrt{25\times 3}=5\sqrt{3}$, $\sqrt{27}=\sqrt{9\times 3}=3\sqrt{3}$, $\sqrt{48}=\sqrt{16\times 3}=4\sqrt{3}$.
Donc
$$B=5\sqrt{3}-2\times 3\sqrt{3}+4\sqrt{3}=(5-6+4)\sqrt{3}=3\sqrt{3}.$$
• On développe par double distributivité :

$$C=2\sqrt{5}\times\sqrt{5}+2\sqrt{5}\times 3-1\times\sqrt{5}-1\times 3=2\times 5+6\sqrt{5}-\sqrt{5}-3=7+5\sqrt{5}.$$

Corrigé — Exercice 10

$(2x+1)^2=4x^2+4x+1$ et $(x-3)(x+3)=x^2-9$. On soustrait le *produit entier*, en mettant des parenthèses :

$$D=\left(4x^2+4x+1\right)-\left(x^2-9\right)=4x^2+4x+1-x^2+9=3x^2+4x+10.$$

Erreur fréquente : écrire $-x^2-9$; le signe « − » devant la parenthèse change le signe de *chaque* terme.

Corrigé — Exercice 11

• $E=(x+1)^2-3^2$ est de la forme a^2-b^2 avec $a=x+1$ et $b=3$:

$$E=\big[(x+1)-3\big]\big[(x+1)+3\big]=(x-2)(x+4).$$

• Dans F, le facteur commun est $(x-3)$:

$$F=(x-3)\big[(x-3)-(2x+1)\big]=(x-3)(x-3-2x-1)=(x-3)(-x-4)=-(x-3)(x+4).$$

Contrôle en développant E : $(x-2)(x+4)=x^2+2x-8$ et $(x+1)^2-9=x^2+2x+1-9=x^2+2x-8$.

Corrigé — Exercice 12

a. $5x-7=3x+9 \iff 5x-3x=9+7 \iff 2x=16 \iff x=8$. $\mathcal{S}=\{8\}$.

b. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $2x+3=0$ ou $x-4=0$, soit $x=-\dfrac{3}{2}$ ou $x=4$. $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{3}{2}\,;4\right\}$.

c. $x^2=49 \iff x=\sqrt{49}$ ou $x=-\sqrt{49}$: $\mathcal{S}=\{-7\,;7\}$ (ne pas oublier la solution négative).

d. Un carré est toujours positif ou nul, il ne peut pas valoir -9 : $\mathcal{S}=\varnothing$.

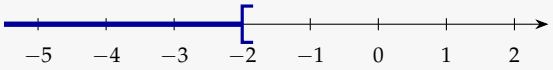
e. $(x-1)^2=5 \iff x-1=\sqrt{5}$ ou $x-1=-\sqrt{5} \iff x=1+\sqrt{5}$ ou $x=1-\sqrt{5}$. $\mathcal{S}=\left\{1-\sqrt{5}\,;1+\sqrt{5}\right\}$.

f. $x^2-16=0 \iff (x-4)(x+4)=0 \iff x=4$ ou $x=-4$. $\mathcal{S}=\{-4\,;4\}$.

Corrigé — Exercice 13

$$-3x+5>11 \iff -3x>11-5 \iff -3x>6 \iff x<\frac{6}{-3} \iff x<-2.$$

On a divisé par -3, nombre **négatif** : le sens de l'inégalité change. $\mathcal{S}=]-\infty\,;-2[$.



Le crochet en -2 est tourné vers l'extérieur de l'ensemble : -2 n'est pas solution (inégalité stricte). Vérification avec $x=-3$: $-3\times(-3)+5=14>11$.

Corrigé — Exercice 14

1. $\dfrac{46}{40}=1{,}15$: le prix a été multiplié par $1{,}15=1+\dfrac{15}{100}$, c'est une augmentation de 15 %.

2. $\dfrac{174}{150}=1{,}16$: le coefficient multiplicateur correspond à une augmentation de 16 %.

En proportion, c'est le second article qui a le plus augmenté (16 % > 15 %). Comparer les hausses en euros (6 € et 24 €) ne suffit pas : il faut les rapporter au prix de départ.

Corrigé — Exercice 15

a. Vrai. Un nombre décimal s'écrit $\dfrac{a}{10^n}$ avec $a\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$: c'est un quotient de deux entiers, donc un rationnel.

b. Faux. Contre-exemple : $\dfrac{1}{3}$ est rationnel, mais son écriture décimale 0,333… est illimitée : il n'est pas décimal.

c. Vrai. $A\times B$ est l'ensemble des couples $(u\,;v)$ avec $u\in A$ et $v\in B$: $(1\,;a)$, $(1\,;b)$, $(2\,;a)$, $(2\,;b)$, $(3\,;a)$, $(3\,;b)$, soit $3\times 2=6$ couples.

d. Faux. La réciproque est « si $x^2=9$, alors $x=3$ ». Contre-exemple : $x=-3$ vérifie $x^2=9$ mais $x\neq 3$.

Série C ⋆⋆⋆ Approfondissement

Corrigé — Exercice 16

1. $100x=27{,}272727\ldots$ et $x=0{,}272727\ldots$ ont exactement la même partie décimale, donc

$$100x-x=27{,}272727\ldots-0{,}272727\ldots=27.$$

2. $100x-x=99x$, donc $99x=27$ et $x=\dfrac{27}{99}=\dfrac{9\times 3}{9\times 11}=\dfrac{3}{11}$. C'est un quotient de deux entiers : $x\in\mathbb{Q}$.

3. Non. Si x était décimal, on aurait $\dfrac{3}{11}=\dfrac{a}{10^n}$, soit $3\times 10^n=11a$: 11 diviserait $3\times 10^n=3\times 2^n\times 5^n$, ce qui est impossible car 11 est premier et différent de 2, 3 et 5. D'ailleurs, l'écriture décimale de x est illimitée.

Corrigé — Exercice 17

1. La contraposée de « si P, alors Q » est « si non Q, alors non P » : ici, « si n est impair, alors n^2 est impair ».
2. Soit n un entier impair : il existe un entier k tel que $n = 2k+1$. Alors

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1,$$

et $2k^2 + 2k$ est un entier : n^2 est impair.
3. Une affirmation et sa contraposée sont vraies en même temps : « si n^2 est pair, alors n est pair » est donc démontrée.
Dans la démonstration par l'absurde de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, on suppose $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec une fraction irréductible ; on obtient $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair, donc p est pair *(c'est ce résultat qui sert)* ; on montre ensuite de même que q est pair, ce qui contredit l'irréductibilité.

Corrigé — Exercice 18

Méthode. on reconnaît $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
$1002^2 - 998^2 = (1002-998)(1002+998) = 4 \times 2000 = 8\,000$.
$97 \times 103 = (100-3)(100+3) = 100^2 - 3^2 = 10\,000 - 9 = 9\,991$.

Corrigé — Exercice 19

$2^{10} = 1\,024$ et $10^3 = 1\,000$, donc $2^{10} > 10^3$. Ces deux nombres sont positifs et l'élévation à la puissance 10 conserve l'ordre entre nombres positifs :

$$\left(2^{10}\right)^{10} > \left(10^3\right)^{10}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 2^{100} > 10^{30}.$$

Corrigé — Exercice 20

1. Aire d'un rectangle : longueur × largeur, donc $\mathcal{A}(x) = x(x+5) = x^2 + 5x$.
2. On développe le membre de droite : $(x-7)(x+12) = x^2 + 12x - 7x - 84 = x^2 + 5x - 84 = \mathcal{A}(x) - 84$.
3. $\mathcal{A}(x) = 84 \iff \mathcal{A}(x) - 84 = 0 \iff (x-7)(x+12) = 0 \iff x = 7$ ou $x = -12$.
Une longueur est positive : $x = -12$ est impossible. L'aire vaut 84 cm^2 pour $x = 7$: le rectangle mesure 7 cm sur 12 cm (et $7 \times 12 = 84$).