Chapitre 1. Fiche d'exercices n°3 — Corrigé

Calcul algébrique

Révision et approfondissement

Corrigés

Corrigé — Exercice 1

a. Par exemple 0,5 et $-2{,}75$ (décimaux, non entiers). **b.** Par exemple $\sqrt{2}$ et π. **c.** Par exemple $-\sqrt{3}$.
d. $6^2 = 36 < 45 < 49 = 7^2$, donc $6 < \sqrt{45} < 7$: par exemple 7 (ou tout entier $\geqslant 7$).
e. $\pi \approx 3{,}14$ et $\sqrt{17} \approx 4{,}12$; par exemple $\frac{10}{3} = 3{,}333\ldots$: il est rationnel, non décimal (son écriture décimale est illimitée) et compris entre π et $\sqrt{17}$.
f. $-4\pi \approx -12{,}57$: oui, les entiers relatifs -13, -14, -15, … sont inférieurs à -4π (il n'existe en revanche aucun entier *naturel* inférieur à -4π).

Corrigé — Exercice 2

A $= 4\,100 \in \mathbb{N}$. **B** $= 9 - 6\sqrt{5} + 5 = 14 - 6\sqrt{5} \in \mathbb{R}$ (irrationnel). **C** $= -\sqrt{16} = -4 \in \mathbb{Z}$.
D $= \dfrac{\frac{5}{15} - \frac{6}{15}}{\frac{9}{2}} = -\dfrac{1}{15} \times \dfrac{2}{9} = -\dfrac{2}{135} \in \mathbb{Q}$ (non décimal : $135 = 3^3 \times 5$).
E : $100E - E = 45$, donc $99E = 45$ et $E = \dfrac{45}{99} = \dfrac{5}{11} \in \mathbb{Q}$ (non décimal).
F $= \sqrt{\dfrac{8}{5} \times \dfrac{2}{5}} = \sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8 \in \mathbb{D}$. **G** $= \sqrt{4 \times 3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0 \in \mathbb{N}$.
H $= -\dfrac{3}{1\,000} = -0{,}003 \in \mathbb{D}$. **K** $= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\pi} \in \mathbb{R}$ (irrationnel, car π l'est).

Corrigé — Exercice 3

a. $0{,}000\,03^2 = \left(3 \times 10^{-5}\right)^2 = 9 \times 10^{-10}$, donc le quotient vaut $\dfrac{9 \times 10^{-10}}{6 \times 10^{-9}} = 1{,}5 \times 10^{-1} = 0{,}15$.
b. Membre de gauche : $16 - \left(3 - 10\sqrt{3} + 25\right) = -12 + 10\sqrt{3}$. Membre de droite : $9\sqrt{3} - 9 - 3 + \sqrt{3} = -12 + 10\sqrt{3}$. Les deux membres sont égaux.
c. $\dfrac{1}{5+\sqrt{2}} = \dfrac{5-\sqrt{2}}{\left(5+\sqrt{2}\right)\left(5-\sqrt{2}\right)} = \dfrac{5-\sqrt{2}}{25-2} = \dfrac{5-\sqrt{2}}{23}$.
d. $3 - \sqrt{2} > 0$ (car $\sqrt{2} < 3$) et $\left(3-\sqrt{2}\right)^2 = 9 - 6\sqrt{2} + 2 = 11 - 6\sqrt{2}$. Donc $3 - \sqrt{2}$ est le nombre positif dont le carré vaut $11 - 6\sqrt{2}$: $3 - \sqrt{2} = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$.

Corrigé — Exercice 4

L'ordre de grandeur est obtenu en arrondissant à l'unité le nombre a de l'écriture scientifique $a \times 10^n$.

	Écriture scientifique	Ordre de grandeur
$A = 0{,}000\,201\,8$	$2{,}018 \times 10^{-4}$	2×10^{-4}
$B = -7\,214{,}25$	$-7{,}214\,25 \times 10^{3}$	-7×10^{3}
$C = 1\,999$	$1{,}999 \times 10^{3}$	2×10^{3}
$D = -0{,}027\,2 \times 10^{-5}$	$-2{,}72 \times 10^{-7}$	-3×10^{-7}
$E = 1\,515 \times 10^{5}$	$1{,}515 \times 10^{8}$	2×10^{8}
$F = 290{,}05 \times 10^{-5}$	$2{,}900\,5 \times 10^{-3}$	3×10^{-3}

Corrigé — Exercice 5

A : $2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$; $2 - \dfrac{23}{7} = -\dfrac{9}{7}$; $3 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{3}$. Donc $A = \dfrac{5}{2} \times \left(-\dfrac{7}{9}\right) \times \dfrac{8}{3} = -\dfrac{280}{54} = -\dfrac{140}{27}$.

B $= \dfrac{30 \times 10^{-2}}{48 \times 10^{-15}} = \dfrac{30}{48} \times 10^{13} = 0{,}625 \times 10^{13} = 6{,}25 \times 10^{12}$.

C : $\left(\dfrac{5}{9} - \dfrac{3}{9}\right)\left(3 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{9} \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{9}$; $\dfrac{7}{9} - 3 = -\dfrac{20}{9}$; le quotient vaut $\dfrac{5}{9} \times \left(-\dfrac{9}{20}\right) = -\dfrac{1}{4}$.

Enfin $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1+2-3}{6} = 0$. Donc $C = 10 - 4 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) + 0 = 11$.

D : $\left(5^2 \times 3^{-2}\right)^2 = 5^4 \times 3^{-4}$; $6 \times 8^2 = 2 \times 3 \times 2^6 = 2^7 \times 3$, d'où $\left(6 \times 8^2\right)^3 = 2^{21} \times 3^3$;

$36^4 = \left(2^2 \times 3^2\right)^4 = 2^8 \times 3^8$; $10^{-5} = 2^{-5} \times 5^{-5}$.

$D = \dfrac{5^4 \times 3^{-4} \times 2^{21} \times 3^3}{2^8 \times 3^8 \times 2^{-5} \times 5^{-5}} = 2^{21-8+5} \times 3^{-4+3-8} \times 5^{4+5} = \dfrac{2^{18} \times 5^9}{3^9} = \left(\dfrac{2^2 \times 5}{3}\right)^9 = \left(\dfrac{20}{3}\right)^9$.

Corrigé — Exercice 6

N°	Rép.	Justification
1	B	$-3 \times x^2 - 3 \times x = -3x^2 - 3x$.
2	A	$-2 \times 4x - 2 \times (-3) = -8x + 6$.
3	C	$6x^2 - 21x + 2x - 7 = 6x^2 - 19x - 7$.
4	A	$2 - 5x - 6x - 3 = -11x - 1$.
5	B	$-(5x^2 + 15x - 4x - 12) = -5x^2 - 11x + 12$; C vaut $(5x-4)(x+3)$, l'opposé.
6	A	$(x-3)(2x-3) = 2x^2 - 9x + 9$; B et C sont égales à l'expression mais sont des formes *factorisées*.
7	C	$7x^2 - 14x = 7x \times x - 7x \times 2 = 7x(x-2)$; A est égale mais incomplètement factorisée, B est fausse.
8	C	$(3x-1)\,[(x-2)-4] = (3x-1)(x-6)$.
9	C	$4x^2 + 2x = 2x \times 2x + 2x \times 1 = 2x(2x+1)$; on n'additionne pas des termes de degrés différents.
10	A	$(x+7)\,[(x+7)-1] = (x+7)(x+6)$.
11	B	$x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$.
12	C	$9x^2 - 2 \times 3x \times \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 9x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{16}$.
13	A	$x^2 - 10^2 = (x-10)(x+10)$.
14	B	Par définition du carré : $(x-1) \times (x-1) = (x-1)^2$ $\left(= x^2 - 2x + 1\right)$.
15	A	$(2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$.
16	B	$(3x)^2 - 13^2 = (3x+13)(3x-13)$.
17	C	$\left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 1^2 = \frac{9}{4}x^2 - 1$.
18	C	$9x^2 - 30x + 25 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2 = (3x-5)^2$.
19	A	$4x^2 - 16x + 16 = (2x-4)^2 = (-2x+4)^2$ (deux nombres opposés ont le même carré) ; B vaut $16x^2 - 32x + 16$.
20	C	$\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{25}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{4}$: le terme en x serait $-\frac{1}{5}x$ et non $-5x$; de même pour A. Ce n'est pas un carré.

Corrigé — Exercice 7

a. $5-10x=8x-12-7 \iff 5-10x=8x-19 \iff 24=18x \iff x=\frac{4}{3}$; $\mathcal{S}=\left\{\frac{4}{3}\right\}$.
b. Équation produit : $x-3=0$ ou $2x+1=0$; $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{2};3\right\}$.
c. $(x-3)\left[(5-x)+7x\right]=0 \iff (x-3)(6x+5)=0 \iff x=3$ ou $x=-\frac{5}{6}$; $\mathcal{S}=\left\{-\frac{5}{6};3\right\}$.
d. $(x+1)^2-4^2=0 \iff (x+1-4)(x+1+4)=0 \iff (x-3)(x+5)=0$; $\mathcal{S}=\{-5;3\}$.
e. $6x+8=x+5+8x-14 \iff 6x+8=9x-9 \iff 17=3x \iff x=\frac{17}{3}$; $\mathcal{S}=\left\{\frac{17}{3}\right\}$.
f. En multipliant par 4 : $3x-2(x+1)=4 \iff x-2=4 \iff x=6$; $\mathcal{S}=\{6\}$.

Corrigé — Exercice 8

1. On divise 1 217 par les nombres premiers successifs 2, 3, 5, 7, 11, … ; on peut s'arrêter dès que le carré du diviseur dépasse 1 217, c'est-à-dire après 31 (car $37^2=1\,369>1\,217$). Aucune de ces divisions ne tombe juste : 1 217 est premier.
2. $247=13\times19$: 247 n'est pas premier.
3. $288=2^5\times3^2$ et $360=2^3\times3^2\times5$, donc $\dfrac{288}{360}=\dfrac{2^5\times3^2}{2^3\times3^2\times5}=\dfrac{2^2}{5}=\dfrac{4}{5}$.
4. a. $3\,600=2^4\times3^2\times5^2$. **b.** $\sqrt{3\,600}=2^2\times3\times5\ (=60)$: on divise chaque exposant par 2.
5. $1\,008=2^4\times3^2\times7$, donc $\sqrt{1\,008}=2^2\times3\times\sqrt{7}=12\sqrt{7}$.
6. a. $2\,100=2^2\times3\times5^2\times7$. **b.** Dans un cube parfait, chaque exposant est un multiple de 3 : il faut multiplier par $2\times3^2\times5\times7^2=4\,410$. On obtient
$2\,100\times4\,410=2^3\times3^3\times5^3\times7^3=210^3=9\,261\,000$.

Corrigé — Exercice 9

a. Faux : $n=2$ est premier et $n+1=3$ est aussi premier.
b. Faux : $\sqrt{2}$ est irrationnel, mais $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ est rationnel.
c. Vrai : $a=\dfrac{2^4}{2^{11}\times5^{11}}=\dfrac{16}{10^{11}}=1{,}6\times10^{-10}$.
d. Vrai : en posant $u=0{,}0909\ldots$, on a $100u-u=9$, donc $u=\frac{9}{99}=\frac{1}{11}$ et
$b=-\left(2+\frac{1}{11}\right)=-\frac{23}{11}\in\mathbb{Q}$.
e. Faux : $x=0{,}5\notin\mathbb{N}$ et $y=0{,}5\notin\mathbb{N}$, mais $x+y=1\in\mathbb{N}$.
f. Vrai : $\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\right)=(a+1)-a=1$, et $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}>0$; on divise par ce nombre (quantité conjuguée).