Chapitre 2. Fiche d'exercices n°1 — Corrigé

Intervalles et valeur absolue

Série A ⋆ Automatismes

Corrigé — Exercice 1

Méthode. un crochet est *fermé* (tourné vers le nombre) quand la borne est atteinte ($\leqslant$, $\geqslant$), *ouvert* sinon ; en $\pm\infty$, le crochet est toujours ouvert.

a. $x \geqslant 3 \iff x \in [3;+\infty[$. **b.** $-2 < x \leqslant 5 \iff x \in]-2;5]$.

c. $x < 1 \iff x \in]-\infty;1[$. **d.** $0 \leqslant x < 4 \iff x \in [0;4[$.

Corrigé — Exercice 2

- $3 \in [1;3]$: la borne 3 est incluse (crochet fermé).
- $-1 \notin]-1;2]$: la borne -1 est exclue (crochet ouvert).
- $\pi \in]3;4[$ car $3 < \pi \approx 3{,}14 < 4$.
- $-5 \notin]-\infty;-5[$: cet intervalle contient les réels *strictement* inférieurs à -5.
- $\sqrt{2} \in [1;2[$ car $1 \leqslant \sqrt{2} \approx 1{,}414 < 2$ (en effet $1^2 \leqslant 2 < 2^2$).

Corrigé — Exercice 3

Méthode. $|a| = a$ si $a \geqslant 0$ et $|a| = -a$ si $a < 0$; pour une expression, on étudie d'abord son signe.

a. $|-7| = 7$. **b.** $|4-9| = |-5| = 5$. **c.** $|-3| \times |2| = 3 \times 2 = 6$.

d. $\sqrt{3} > 1$ (car $3 > 1$), donc $\sqrt{3} - 1 > 0$ et $\left|\sqrt{3}-1\right| = \sqrt{3}-1$.

e. $\sqrt{5} > 2$ (car $5 > 4 = 2^2$), donc $2 - \sqrt{5} < 0$ et $\left|2-\sqrt{5}\right| = -\left(2-\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}-2$.

f. $\left|-\dfrac{3}{4}\right| = \dfrac{3}{4}$.

Corrigé — Exercice 4

Méthode. la distance entre a et b est $|a-b| = |b-a|$; c'est toujours un nombre positif.

a. $|8-3| = 5$. **b.** $|2-(-4)| = |6| = 6$. **c.** $|-1-(-7)| = |6| = 6$. **d.** $|0-(-3{,}5)| = 3{,}5$.

Corrigé — Exercice 5

Méthode. l'intersection $A \cap B$ contient les nombres qui sont *à la fois* dans A et dans B ; une représentation sur un axe aide beaucoup.

a. $[1;6] \cap [4;9] = [4;6]$ (de la plus grande borne gauche à la plus petite borne droite).

b. $]-\infty;2] \cap [0;+\infty[= [0;2]$.

c. $[2;5] \cap [7;9] = \varnothing$: aucun nombre n'est à la fois inférieur à 5 et supérieur à 7.

Corrigé — Exercice 6

Méthode. la réunion $A \cup B$ contient les nombres qui sont dans A *ou* dans B (ou dans les deux).

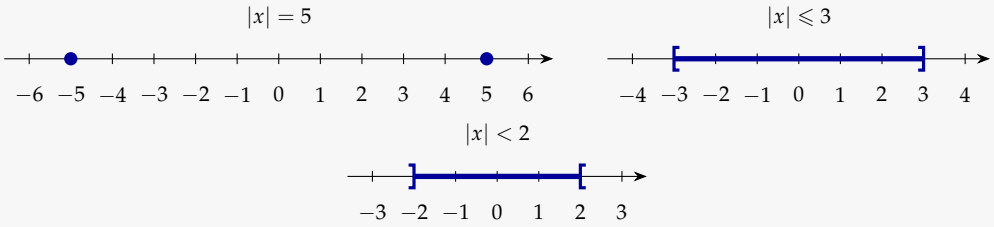
a. $[1;6] \cup [4;9] = [1;9]$: les deux intervalles se chevauchent.

b. $]-\infty;0] \cup [0;+\infty[= \mathbb{R}$: tout réel est soit négatif, soit positif.

c. $[3;5] \cup]4;8[= [3;8[$: la borne 3 est atteinte (dans $[3;5]$), la borne 8 ne l'est pas.

Corrigé — Exercice 7

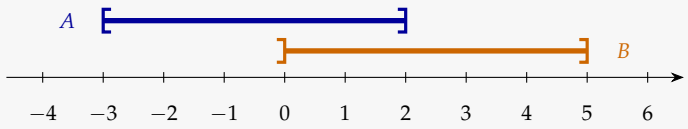
Méthode. $|x|$ est la distance entre x et 0.
- $|x| = 5$: les nombres à distance 5 de 0 sont -5 et 5. $\mathcal{S} = \{-5;5\}$.
- $|x| \leqslant 3$: distance à 0 inférieure ou égale à 3. $\mathcal{S} = [-3;3]$.
- $|x| < 2$: distance à 0 strictement inférieure à 2. $\mathcal{S} =]-2;2[$.



Série B ⋆⋆ Entraînement

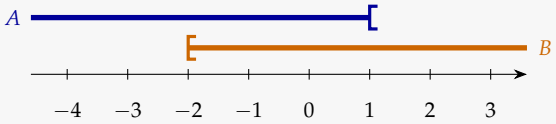
Corrigé — Exercice 8

On représente A (en bleu, en haut) et B (en orange, juste au-dessus de l'axe) :



$A \cap B$ est la partie couverte par les deux couleurs : $A \cap B =]0;2]$ (0 est exclu car il n'est pas dans B, 2 est inclus car il est dans A et dans B).
$A \cup B$ est la partie couverte par au moins une couleur : $A \cup B = [-3;5]$.

Corrigé — Exercice 9



$A \cap B = [-2;1[$: les réels à la fois supérieurs ou égaux à -2 et strictement inférieurs à 1.
$A \cup B =]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$: tout réel est soit strictement inférieur à 1, soit (s'il est supérieur ou égal à 1) dans B.

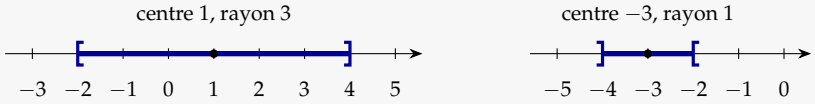
Corrigé — Exercice 10

Méthode. $|x-a|$ est la distance entre x et a.
- $|x-4| = 2$: les nombres à distance 2 de 4 sont $4-2=2$ et $4+2=6$. $\mathcal{S} = \{2;6\}$.
- $|x+2| = |x-(-2)| = 3$: les nombres à distance 3 de -2 sont $-2-3=-5$ et $-2+3=1$. $\mathcal{S} = \{-5;1\}$.

Vérification : $|1+2| = 3$ et $|-5+2| = |-3| = 3$.

Corrigé — Exercice 11

- $|x-1| \leqslant 3$: distance entre x et 1 au plus 3, donc $1-3 \leqslant x \leqslant 1+3$. $\mathcal{S} = [-2;4]$.
- $|x+3| < 1$, soit $|x-(-3)| < 1$: distance entre x et -3 strictement inférieure à 1, donc $-4 < x < -2$. $\mathcal{S} =]-4;-2[$.



Corrigé — Exercice 12

Méthode. l'intervalle $[a-r\,;a+r]$ a pour centre $a = \dfrac{\text{borne gauche} + \text{borne droite}}{2}$ et pour rayon $r = \dfrac{\text{borne droite} - \text{borne gauche}}{2}$.

a. $[2\,;10]$: centre $\dfrac{2+10}{2} = 6$, rayon $\dfrac{10-2}{2} = 4$. Donc $x \in [2\,;10] \iff |x-6| \leqslant 4$.

b. $]-1\,;7[$: centre $\dfrac{-1+7}{2} = 3$, rayon $\dfrac{7-(-1)}{2} = 4$. Donc $x \in]-1\,;7[\iff |x-3| < 4$.

Corrigé — Exercice 13

a. Faux. Contre-exemple : $a = 1$ et $b = -1$: $|a+b| = |0| = 0$ alors que $|a| + |b| = 2$. (On a seulement $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.)

b. Faux. Contre-exemple : $a = -2$: $|-a| = |2| = 2$, qui n'est pas égal à $a = -2$. (L'égalité n'est vraie que si $a \geqslant 0$.)

c. Vrai. Si $0 \leqslant x \leqslant 3$, alors $|x| = x \leqslant 3$. Si $-2 \leqslant x < 0$, alors $|x| = -x \leqslant 2 \leqslant 3$. Dans tous les cas, $|x| \leqslant 3$.

d. Faux. $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$: une racine carrée est toujours positive. Plus généralement, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Corrigé — Exercice 14

a. On multiplie l'encadrement par $3 > 0$ (le sens est conservé) : $3 \times 1{,}414 \leqslant 3\sqrt{2} \leqslant 3 \times 1{,}415$, soit

$$4{,}242 \leqslant 3\sqrt{2} \leqslant 4{,}245.$$

On ajoute 2 à chaque membre : $3{,}414 \leqslant 2 + \sqrt{2} \leqslant 3{,}415$.

b. Amplitude (borne supérieure moins borne inférieure) : $4{,}245 - 4{,}242 = 0{,}003$ pour $3\sqrt{2}$, et $3{,}415 - 3{,}414 = 0{,}001$ pour $2+\sqrt{2}$. Multiplier par 3 a triplé l'amplitude ; ajouter 2 ne l'a pas changée.

Corrigé — Exercice 15

a. $\dfrac{7}{3} = 2{,}333\ldots$; le chiffre des millièmes (3) est inférieur à 5 : l'arrondi au centième est 2,33.

b. $3{,}14 \leqslant \pi < 3{,}15$: la valeur approchée par défaut de π à 10^{-2} près est 3,14.

c. Distance entre $\dfrac{22}{7}$ et π : $\left|\dfrac{22}{7} - \pi\right| \approx |3{,}142857 - 3{,}141593| \approx 0{,}0013$. Comme $0{,}0013 < 0{,}01$, la fraction $\dfrac{22}{7}$ est bien une valeur approchée de π à 10^{-2} près (l'écart est même inférieur à 0,002).

Série C ⋆⋆⋆ Approfondissement

Corrigé — Exercice 16

a. $|L - 50| \leqslant 0{,}2 \iff 50 - 0{,}2 \leqslant L \leqslant 50 + 0{,}2 \iff L \in [49{,}8\,;50{,}2]$.

b. $49{,}75 < 49{,}8$: **non conforme** (écart $|49{,}75 - 50| = 0{,}25 > 0{,}2$).
$49{,}8 \leqslant 50{,}15 \leqslant 50{,}2$: **conforme** (écart 0,15).
$50{,}21 > 50{,}2$: **non conforme** (écart $0{,}21 > 0{,}2$).

c. L'amplitude vaut $50{,}2 - 49{,}8 = 0{,}4$ mm, c'est-à-dire le double de la tolérance 0,2 mm.

Corrigé — Exercice 17

$2x - 6 = 2(x-3)$, donc $|2x-6| = |2| \times |x-3| = 2|x-3|$. Ainsi

$$|2x-6| \leqslant 4 \iff 2|x-3| \leqslant 4 \iff |x-3| \leqslant 2 \iff 3 - 2 \leqslant x \leqslant 3 + 2.$$

$\mathcal{S} = [1\,;5]$. Vérification aux bornes : $|2 \times 1 - 6| = 4$ et $|2 \times 5 - 6| = 4$.

Corrigé — Exercice 18

a. $\sqrt{x^2}$ est le nombre *positif* dont le carré vaut x^2. Si $x \geqslant 0$, c'est x ; si $x < 0$, c'est $-x$ (car $(-x)^2 = x^2$ et $-x > 0$). Dans les deux cas, c'est $|x|$.

b. $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} = \left|1-\sqrt{2}\right|$. Or $\sqrt{2} > 1$, donc $1-\sqrt{2} < 0$ et $\left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1$.

Donc $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}-1$ (et non $1-\sqrt{2}$, qui est négatif).

Corrigé — Exercice 19

On a $2 \leqslant x \leqslant 5$ et $-1 \leqslant y \leqslant 3$.

a. On ajoute membre à membre : $2+(-1) \leqslant x+y \leqslant 5+3$, soit $1 \leqslant x+y \leqslant 8$.

b. On multiplie $-1 \leqslant y \leqslant 3$ par -1, ce qui change le sens : $-3 \leqslant -y \leqslant 1$. Puis on ajoute : $2-3 \leqslant x-y \leqslant 5+1$, soit $-1 \leqslant x-y \leqslant 6$.
(Erreur fréquente : soustraire membre à membre, ce qui est faux.)

c. x est positif.
• Si $0 \leqslant y \leqslant 3$: on multiplie des nombres positifs, $2 \times 0 \leqslant xy \leqslant 5 \times 3$, soit $0 \leqslant xy \leqslant 15$.
• Si $-1 \leqslant y < 0$: $0 < -y \leqslant 1$, donc $0 < x \times (-y) \leqslant 5 \times 1$, soit $-5 \leqslant xy < 0$.
Bilan : $-5 \leqslant xy \leqslant 15$; les bornes sont atteintes pour $(x\,;y) = (5\,;-1)$ et $(5\,;3)$.

Corrigé — Exercice 20

• $|n-2{,}3| < 1{,}5 \iff 2{,}3-1{,}5 < n < 2{,}3+1{,}5 \iff 0{,}8 < n < 3{,}8$. Les entiers de cet intervalle sont 1, 2 et 3.
• $|n+1| \leqslant 2 \iff |n-(-1)| \leqslant 2 \iff -3 \leqslant n \leqslant 1$. Les entiers relatifs solutions sont -3, -2, -1, 0 et 1.