Chapitre 1. Second degré

Devoir surveillé n°1 — Corrigé

Forme canonique · équations et inéquations · lecture graphique · équation paramétrique

Durée : 2 heures — calculatrice collège autorisée

Corrigé

Corrigé — Exercice 1

1. **Réponse b.** $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $\beta = f(2) = 4 - 8 + 7 = 3$, donc $f(x) = (x-2)^2 + 3$. *(1 pt)*
2. **Réponse c.** $\Delta = 9 + 40 = 49$, $x = \dfrac{3 \pm 7}{2}$: les solutions sont -2 et 5. *(1 pt)*
3. **Réponse c.** $a = -2 < 0$: f est croissante puis décroissante, avec un maximum en $\alpha = -\dfrac{8}{-4} = 2$. *(1 pt)*
4. **Réponse d.** $\Delta = 1 + 48 = 49$, racines $\dfrac{-1 \pm 7}{4}$, soit -2 et $\dfrac{3}{2}$; $2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)(x+2) = (2x-3)(x+2)$. Contrôle : $(2x-3)(x+2) = 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 2x^2 + x - 6$ ✓. *(1 pt)*
5. **Réponse b.** $\alpha = \dfrac{12}{6} = 2$ et $\beta = 3 \times 4 - 24 + 5 = -7$: $S(2\,;-7)$. *(1 pt)*

Corrigé — Exercice 2

a. $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 36 - 32 = 4$, $\sqrt{\Delta} = 2$: $x_1 = \dfrac{6-2}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{6+2}{2} = 4$. $\mathcal{S} = \{2\,;4\}$. *(1 pt)*

b. $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25$, $\sqrt{\Delta} = 5$: $x_1 = \dfrac{-3-5}{4} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{1}{2}$. $\mathcal{S} = \left\{-2\,;\dfrac{1}{2}\right\}$. *(1 pt)*

c. On développe : $(2x-1)(x+2) = 2x^2 + 4x - x - 2 = 2x^2 + 3x - 2$, donc l'équation équivaut à $2x^2 + 3x - 2 - x^2 + 4 = 0$, soit $x^2 + 3x + 2 = 0$. $\Delta = 9 - 8 = 1$: $x = \dfrac{-3 \pm 1}{2}$, soit -2 et -1. $\mathcal{S} = \{-2\,;-1\}$.
Autre méthode : $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, d'où $(x+2)\,[(2x-1) - (x-2)] = 0 \iff (x+2)(x+1) = 0$. *(1 pt)*

d. Équation bicarrée : on pose $X = x^2$, avec $X \geqslant 0$. L'équation devient $X^2 - 3X - 4 = 0$, de discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$: $X = \dfrac{3-5}{2} = -1$ ou $X = \dfrac{3+5}{2} = 4$. La valeur $X = -1$ est à rejeter (un carré n'est jamais négatif). Reste $x^2 = 4$, soit $x = -2$ ou $x = 2$. $\mathcal{S} = \{-2\,;2\}$. Contrôle : $16 - 12 - 4 = 0$ ✓. *(1 pt)*

Corrigé — Exercice 3

a. $\Delta = 25 - 16 = 9$, racines $\dfrac{5 \pm 3}{2}$, soit 1 et 4. Le coefficient $a = 1$ est positif : le trinôme est négatif entre ses racines. $\mathcal{S} = [1\,;4]$ (inégalité large : racines incluses). *(1 pt)*

b. $\Delta = 25 - 4 \times (-2) \times 3 = 25 + 24 = 49$, racines $\dfrac{-5 \pm 7}{-4}$, soit $-\dfrac{1}{2}$ et 3. Ici $a = -2 < 0$: le trinôme est positif entre ses racines. $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{1}{2}\,;3\right]$. *(1 pt)*

c. $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$: le trinôme n'a pas de racine et garde le signe de $a = 1 > 0$. Il est strictement positif pour tout réel x : $\mathcal{S} = \mathbb{R}$. *(1 pt)*

d. Valeur interdite : $x = 2$. Numérateur : $x^2 - 4x - 5$ a pour discriminant $16 + 20 = 36$ et pour racines $\dfrac{4 \pm 6}{2}$, soit -1 et 5 ; il est positif à l'extérieur des racines. Dénominateur : $2 - x > 0 \iff x < 2$.

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$x^2 - 4x - 5$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$2 - x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
quotient		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$\mathcal{S} =]-\infty\,;-1] \cup]2\,;5]$ (-1 et 5 inclus car le quotient y est nul ; 2 exclu). *(1 pt)*

Corrigé — Exercice 4

1. La parabole coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 3 : les racines de f sont -1 et 3. La forme factorisée est donc $f(x) = a(x+1)(x-3)$, où a est le coefficient dominant. La courbe passe par le point $(0\,;3)$: $f(0) = a \times 1 \times (-3) = -3a = 3$, d'où $a = -1$ et

$$f(x) = -(x+1)(x-3).$$

(On peut aussi obtenir $a = -1$ en remarquant que la parabole est tournée vers le bas et passe par S.) *(1 pt)*
2. Le sommet est $S(1\,;4)$: la forme canonique est $f(x) = a(x-1)^2 + 4$ avec $a = -1$ (coefficient dominant trouvé à la question 1, ou déduit de $f(0) = a + 4 = 3$), soit

$$f(x) = -(x-1)^2 + 4.$$

En développant : $f(x) = -\left(x^2 - 2x + 1\right) + 4 = -x^2 + 2x - 1 + 4 = -x^2 + 2x + 3$. (Contrôle avec la forme factorisée : $-(x+1)(x-3) = -\left(x^2 - 2x - 3\right) = -x^2 + 2x + 3$ ✓.) *(1 pt)*
3. $f(x) = -5 \iff -x^2 + 2x + 3 = -5 \iff -x^2 + 2x + 8 = 0 \iff x^2 - 2x - 8 = 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 4 + 32 = 36$, $\sqrt{\Delta} = 6$: $x = \dfrac{2-6}{2} = -2$ ou $x = \dfrac{2+6}{2} = 4$. $\mathcal{S} = \{-2\,;4\}$.
Contrôle : $f(-2) = -4 - 4 + 3 = -5$ ✓ et $f(4) = -16 + 8 + 3 = -5$ ✓. (Graphiquement, ce sont les abscisses des deux points de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée -5, hors du cadre.) *(1 pt)*

Corrigé — Exercice 5

Partie A.
1. Ici $a = 1$, $b = -2m$ et $c = m + 6$, donc

$$\Delta = (-2m)^2 - 4 \times 1 \times (m+6) = 4m^2 - 4m - 24 = 4\left(m^2 - m - 6\right).$$

Le trinôme $m^2 - m - 6$ a pour discriminant $1 + 24 = 25$ et pour racines $\dfrac{1 \pm 5}{2}$, soit -2 et 3 : $m^2 - m - 6 = (m-3)(m+2)$, d'où $\Delta = 4(m-3)(m+2)$. (Contrôle : $4(m-3)(m+2) = 4\left(m^2 - m - 6\right) = 4m^2 - 4m - 24$ ✓.) *(1 pt)*
2. (E_m) admet une unique solution si et seulement si $\Delta = 0$, c'est-à-dire $m = 3$ ou $m = -2$. Cette solution est la racine double $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = m$.
Pour $m = 3$: (E_3) s'écrit $x^2 - 6x + 9 = 0$, soit $(x-3)^2 = 0$: l'unique solution est $x = 3$.
Pour $m = -2$: (E_{-2}) s'écrit $x^2 + 4x + 4 = 0$, soit $(x+2)^2 = 0$: l'unique solution est $x = -2$. *(1 pt)*
3. Le signe de $\Delta = 4(m-3)(m+2)$ est celui du trinôme $m^2 - m - 6$, de coefficient dominant positif : positif à l'extérieur des racines -2 et 3, négatif entre elles.

m	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

(E_m) admet deux solutions distinctes ($\Delta > 0$) pour $m \in]-\infty\,;-2[\cup]3\,;+\infty[$, et aucune solution ($\Delta < 0$) pour $m \in]-2\,;3[$. *(1 pt)*

Partie B. Deux nombres de somme $S = 11$ et de produit $P = 24$ sont les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$, soit $x^2 - 11x + 24 = 0$. $\Delta = 121 - 96 = 25$, $x = \dfrac{11 \pm 5}{2}$: les nombres cherchés sont 3 et 8 (dans un ordre quelconque). Contrôle : $3 + 8 = 11$ ✓ et $3 \times 8 = 24$ ✓. *(1 pt)*

Corrigé détaillé

Corrigé — Exercice 1

1. Vrai. Si $\Delta < 0$, le trinôme ne s'annule jamais : il ne peut donc pas changer de signe. Il garde le signe de son coefficient dominant a sur $\mathbb{R}$ tout entier.
2. Faux. Lorsque $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas : son sommet est un **maximum**, pas un minimum. C'est pour $a > 0$ que le sommet est un minimum.
3. Vrai. Lorsque $\Delta \geqslant 0$, les racines valent $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ et leur somme vaut

$$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

4. Faux. Un carré est toujours positif ou nul : $x^2 = -4$ n'a **aucune** solution réelle. On peut aussi écrire $x^2 + 4 = 0$, de discriminant $0 - 16 = -16 < 0$.

Corrigé — Exercice 2

1. $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 49 - 24 = 25 > 0$ et $\sqrt{25} = 5$, donc

$$x = \frac{7 \pm 5}{6} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}\,;2\right\}.$$

Contrôle : $3 \times \dfrac{1}{9} - \dfrac{7}{3} + 2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{7}{3} + 2 = \dfrac{1-7+6}{3} = 0$ ✓.
2. $\Delta = 36 - 36 = 0$: racine double $x = -\dfrac{6}{2} = -3$. On reconnaît d'ailleurs $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$.

$$\mathcal{S} = \{-3\}.$$

3. $\Delta = 9 - 4 \times (-2) \times (-5) = 9 - 40 = -31 < 0$: $\mathcal{S} = \varnothing$.
Le trinôme garde le signe de $a = -2$: il est strictement négatif sur $\mathbb{R}$.
4. Le coefficient dominant 3 est positif : le trinôme est négatif *entre* ses racines.

$$\mathcal{S} = \left[\frac{1}{3}\,;2\right].$$

Les bornes sont incluses car l'inégalité est large.
5. On pose $X = x^2$, avec $X \geqslant 0$: $X^2 - 5X + 4 = 0$, de discriminant $25 - 16 = 9$, donc $X = \dfrac{5 \pm 3}{2}$, soit $X = 1$ ou $X = 4$.
Ces deux valeurs sont positives : $x^2 = 1$ donne $x = \pm 1$, et $x^2 = 4$ donne $x = \pm 2$.

$$\mathcal{S} = \{-2\,;-1\,;1\,;2\}.$$

Corrigé — Exercice 3

1. $a = -2$, $b = 8$, $c = -6$, donc

$$\Delta = 8^2 - 4 \times (-2) \times (-6) = 64 - 48 = 16 > 0, \qquad \sqrt{16} = 4.$$

Les racines sont

$$x_1 = \frac{-8-4}{2 \times (-2)} = \frac{-12}{-4} = 3, \qquad x_2 = \frac{-8+4}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1.$$

2. $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = -2(x-1)(x-3)$.
Contrôle : $-2\left(x^2 - 4x + 3\right) = -2x^2 + 8x - 6$ ✓.
3. $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{8}{-4} = 2$ et $\beta = f(2) = -8 + 16 - 6 = 2$, donc

$$f(x) = -2(x-2)^2 + 2.$$

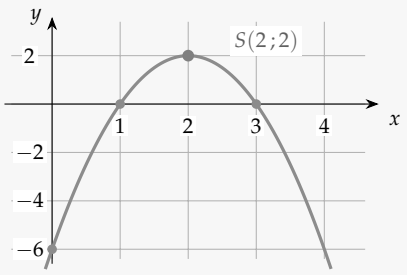
Le sommet est $S(2\,;2)$. Contrôle : $-2\left(x^2 - 4x + 4\right) + 2 = -2x^2 + 8x - 8 + 2 = -2x^2 + 8x - 6$ ✓.
4. Comme $a = -2 < 0$, f croît puis décroît, et S est un **maximum**.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	2	↘	

Pour le signe, le coefficient dominant est négatif : f est positive *entre* ses racines 1 et 3.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Contrôle : $f(0) = -6 < 0$, et 0 est bien à l'extérieur de $[1\,;3]$ ✓ ; $f(2) = 2 > 0$, et 2 est bien entre les racines ✓.
5. On place $S(2\,;2)$, les racines $(1\,;0)$ et $(3\,;0)$, ainsi que $(0\,;-6)$.



La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 2$: on lit bien $f(1) = f(3) = 0$ et $f(0) = f(4) = -6$.

Corrigé — Exercice 4

1. Le grillage couvre les trois côtés non adossés au mur : deux côtés de longueur x et le côté parallèle au mur. La longueur totale vaut 60 mètres, donc ce dernier côté mesure

$$60 - 2x \text{ mètres.}$$

Pour que l'enclos existe, il faut $x > 0$ et $60 - 2x > 0$, c'est-à-dire $x < 30$: ainsi $x \in\,]0\,;30[$.
2. L'aire d'un rectangle est le produit de ses dimensions :

$$A(x) = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x.$$

3. On a $\alpha = -\dfrac{60}{2 \times (-2)} = 15$ et $A(15) = 15 \times (60 - 30) = 15 \times 30 = 450$, donc

$$A(x) = -2(x-15)^2 + 450.$$

Contrôle : $-2\left(x^2 - 30x + 225\right) + 450 = -2x^2 + 60x - 450 + 450 = -2x^2 + 60x$ ✓.
Un carré étant positif ou nul et le coefficient -2 étant négatif, on a $A(x) \leqslant 450$ pour tout x, avec

égalité si et seulement si $x = 15$.
L'aire maximale vaut donc **450 m²**, atteinte pour un enclos de 15 m sur $60 - 30 = 30$ m.
4. On résout $A(x) > 400$, c'est-à-dire

$$-2x^2 + 60x - 400 > 0 \iff x^2 - 30x + 200 < 0$$

(on a divisé par -2, ce qui change le sens de l'inégalité).
$\Delta = 900 - 800 = 100$ et $\sqrt{100} = 10$, donc les racines sont $\dfrac{30 \pm 10}{2}$, soit 10 et 20.
Le coefficient dominant est positif : le trinôme est négatif *entre* ses racines.

$$\mathcal{S} =]10\,;20[\,.$$

Ces deux valeurs appartiennent bien à $]0\,;30[$, l'ensemble est donc acceptable.
Contrôle : $A(15) = 450 > 400$ ✓ et $A(10) = 10 \times 40 = 400$, la borne est bien exclue ✓.