### Chapitre 1. Fiche d'exercices n°1 — Corrigé détaillé

# Second degré

Toutes les étapes de calcul, les contrôles et les remarques de méthode

**Méthode — les outils utilisés dans ce corrigé**

Pour un trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ :

- **Racines.** Si $\Delta > 0$ : deux racines $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ; si $\Delta = 0$ : une racine double $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ ; si $\Delta < 0$ : aucune racine réelle.
- **Factorisation.** Si $\Delta > 0$ : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ; si $\Delta = 0$ : $f(x) = a(x - x_0)^2$ ; si $\Delta < 0$ : pas de factorisation dans $\mathbb{R}$.
- **Forme canonique.** $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$ ; le sommet de la parabole est $S(\alpha\,;\beta)$, minimum si $a > 0$, maximum si $a < 0$.
- **Signe.** Le trinôme est du signe de $a$ à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ entre les racines ; s'il n'a pas de racine, il est toujours du signe de $a$.
- **Somme et produit.** Si $\Delta \geqslant 0$ : $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

## Série A ⋆ — Automatismes

**Corrigé — Exercice 1**

**Énoncé.** *Calculer le discriminant de chaque trinôme et préciser le nombre de racines : a. $x^2 - 5x + 6$ ; b. $2x^2 + 3x + 5$ ; c. $x^2 - 6x + 9$ ; d. $-x^2 + 4x - 3$.*

On identifie à chaque fois les coefficients $a$, $b$, $c$, puis on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$ ; le signe de $\Delta$ donne le nombre de racines.

**a.** $a = 1, b = -5, c = 6$ : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$. Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet **deux racines distinctes**.

**b.** $a = 2, b = 3, c = 5$ : $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40 = -31$. Comme $\Delta < 0$, le trinôme n'admet **aucune racine réelle**.

**c.** $a = 1, b = -6, c = 9$ : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 36 - 36 = 0$. Le trinôme admet **une racine double**, $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{6}{2} = 3$.

**d.** $a = -1, b = 4, c = -3$ : $\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 16 - 12 = 4$. Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet **deux racines distinctes**.

*Attention aux signes dans d :* $-4ac = -4 \times (-1) \times (-3) = -12$, le produit de deux nombres négatifs est positif, puis on le multiplie par $-4$.

## Corrigé — Exercice 2

**Énoncé.** *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *: a.* $x^2-5x+6=0$ *; b.* $x^2+2x-15=0$ *; c.* $2x^2-7x+3=0$ *; d.* $x^2+x+1=0$.

**a.** D'après l'exercice 1, $\Delta=1$ et $\sqrt{\Delta}=1$. Les racines sont

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5-1}{2}=2 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+1}{2}=3.$$

Donc $\mathcal{S}=\{2\,;3\}$. Contrôle : $2^2-5\times2+6=4-10+6=0$ ✓.
**b.** $a=1, b=2, c=-15$ : $\Delta=2^2-4\times1\times(-15)=4+60=64$ et $\sqrt{64}=8$.

$$x_1=\frac{-2-8}{2}=-5 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-2+8}{2}=3.$$

Donc $\mathcal{S}=\{-5\,;3\}$. Contrôle : $(-5)^2+2\times(-5)-15=25-10-15=0$ ✓.
**c.** $a=2, b=-7, c=3$ : $\Delta=(-7)^2-4\times2\times3=49-24=25$ et $\sqrt{25}=5$.

$$x_1=\frac{7-5}{2\times2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{7+5}{4}=\frac{12}{4}=3.$$

Donc $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2}\,;3\right\}$. Contrôle : $2\times3^2-7\times3+3=18-21+3=0$ ✓.
**d.** $a=1, b=1, c=1$ : $\Delta=1^2-4\times1\times1=1-4=-3<0$. L'équation n'a pas de solution réelle : $\mathcal{S}=\varnothing$.
*Remarque.* Dans c, le dénominateur est $2a=4$ et non 2 : c'est l'erreur la plus fréquente lorsque $a\neq1$.

## Corrigé — Exercice 3

**Énoncé.** *Factoriser lorsque c'est possible : a.* $x^2-9$ *; b.* $x^2-4x+4$ *; c.* $3x^2-12x+9$ *; d.* $x^2+4$.

**a.** On reconnaît une différence de deux carrés, $x^2-3^2$ : $x^2-9=(x-3)(x+3)$.
**b.** On reconnaît le développement de $(x-2)^2=x^2-4x+4$ : $x^2-4x+4=(x-2)^2$.
On peut aussi passer par le discriminant : $\Delta=16-16=0$, racine double $x_0=2$, donc $x^2-4x+4=1\times(x-2)^2$.
**c.** $a=3, b=-12, c=9$ : $\Delta=(-12)^2-4\times3\times9=144-108=36$ et $\sqrt{36}=6$.

$$x_1=\frac{12-6}{6}=1 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{12+6}{6}=3.$$

D'après la formule $a(x-x_1)(x-x_2)$ : $3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$.
Contrôle : $3(x-1)(x-3)=3\left(x^2-3x-x+3\right)=3\left(x^2-4x+3\right)=3x^2-12x+9$ ✓.
Autre chemin : factoriser d'abord par 3, $3\left(x^2-4x+3\right)$, puis factoriser $x^2-4x+3$ dont les racines sont 1 et 3.
**d.** $a=1, b=0, c=4$ : $\Delta=0^2-4\times1\times4=-16<0$. Le trinôme n'a pas de racine, donc $x^2+4$ **ne se factorise pas** dans $\mathbb{R}$.
C'est cohérent : pour tout réel $x$, $x^2\geqslant0$ donc $x^2+4\geqslant4>0$, et un produit de facteurs du premier degré s'annulerait quelque part.

## Corrigé — Exercice 4

**Énoncé.** *Mettre sous forme canonique $f(x) = x^2 - 6x + 5$ puis $g(x) = 2x^2 + 8x + 3$.*

**Pour $f$.** $a = 1$, $b = -6$, $c = 5$. L'abscisse du sommet est $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-6}{2} = 3$, et

$$\beta = f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4.$$

Donc $f(x) = (x-3)^2 - 4$.
*Autre méthode, en complétant le carré :* $x^2 - 6x$ est le début du développement de $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$, donc $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$ et

$$f(x) = (x-3)^2 - 9 + 5 = (x-3)^2 - 4.$$

Contrôle : $(x-3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 9 - 4 = x^2 - 6x + 5$ ✓.

**Pour $g$.** $a = 2$, $b = 8$, $c = 3$. On a $\alpha = -\dfrac{8}{2 \times 2} = -2$ et

$$\beta = g(-2) = 2 \times (-2)^2 + 8 \times (-2) + 3 = 8 - 16 + 3 = -5.$$

Donc $g(x) = 2(x+2)^2 - 5$.
*Autre méthode :* on factorise d'abord les termes en $x$ par $a = 2$ :

$$g(x) = 2\left(x^2 + 4x\right) + 3 = 2\left[(x+2)^2 - 4\right] + 3 = 2(x+2)^2 - 8 + 3 = 2(x+2)^2 - 5.$$

Contrôle : $2(x+2)^2 - 5 = 2\left(x^2 + 4x + 4\right) - 5 = 2x^2 + 8x + 8 - 5 = 2x^2 + 8x + 3$ ✓.

## Corrigé — Exercice 5

**Énoncé.** *Soit $f(x) = -x^2 + 4x - 1$. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole, préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum, et dresser le tableau de variations de $f$.*

$a = -1$, $b = 4$, $c = -1$. L'abscisse du sommet est

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times (-1)} = -\frac{4}{-2} = 2,$$

et son ordonnée est $\beta = f(2) = -2^2 + 4 \times 2 - 1 = -4 + 8 - 1 = 3$. Le sommet est donc $S(2\,;3)$.
Comme $a = -1 < 0$, la parabole est tournée vers le bas : $f$ est croissante puis décroissante, et le sommet correspond au **maximum** de $f$, qui vaut 3 et est atteint en $x = 2$.

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | |

$f$ est croissante sur $]-\infty\,;2]$ et décroissante sur $[2\,;+\infty[$.
On peut le confirmer avec la forme canonique : $f(x) = -(x-2)^2 + 3$, et comme $-(x-2)^2 \leqslant 0$, on a bien $f(x) \leqslant 3$ pour tout $x$, avec égalité pour $x = 2$.

### Corrigé — Exercice 6

**Énoncé.** *Étudier le signe de chaque trinôme sur $\mathbb{R}$ : a. $x^2 - x - 6$ ; b. $-2x^2 + 8$.*

**a.** $a = 1, b = -1, c = -6$ : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$, $\sqrt{25} = 5$, racines

$$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - x - 6$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Conclusion : $x^2 - x - 6 > 0$ sur $]-\infty ; -2[ \cup ]3 ; +\infty[$, $x^2 - x - 6 < 0$ sur $]-2 ; 3[$, et le trinôme s'annule en $-2$ et en 3.
Contrôle : pour $x = 0$, $0 - 0 - 6 = -6 < 0$ ✓ ; pour $x = 4$, $16 - 4 - 6 = 6 > 0$ ✓.
**b.** $-2x^2 + 8 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = -2$ ou $x = 2$ (on retrouve ces racines par $\Delta = 0^2 - 4 \times (-2) \times 8 = 64$, $\sqrt{64} = 8$, $x = \dfrac{0 \pm 8}{-4}$).
Comme $a = -2 < 0$, le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x^2 + 8$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Conclusion : $-2x^2 + 8 > 0$ sur $]-2 ; 2[$, $-2x^2 + 8 < 0$ sur $]-\infty ; -2[ \cup ]2 ; +\infty[$.
Contrôle : pour $x = 0$, $8 > 0$ ✓ ; pour $x = 3$, $-18 + 8 = -10 < 0$ ✓.

### Corrigé — Exercice 7

**Énoncé.** *Le trinôme $x^2 - 7x + 12$ admet deux racines. Donner leur somme et leur produit sans les calculer, puis les déterminer mentalement.*

Ici $a = 1, b = -7, c = 12$. D'après les relations entre coefficients et racines,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-7}{1} = 7 \qquad \text{et} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{12}{1} = 12.$$

On cherche deux nombres de produit 12 : les couples d'entiers possibles sont $(1 ; 12)$, $(2 ; 6)$ et $(3 ; 4)$.
Seul le couple $(3 ; 4)$ a pour somme 7.
Les racines sont donc **3** et **4**, et $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$.
Contrôle par le discriminant : $\Delta = 49 - 48 = 1$, racines $\dfrac{7 \pm 1}{2}$, soit 3 et 4 ✓.

## Série B ⋆⋆ — Application

### Corrigé — Exercice 8

**Énoncé.** *Résoudre dans $\mathbb{R}$ : a. $x^2 - 4x + 3 \leqslant 0$ ; b. $-x^2 + x + 6 > 0$.*

**a.** $a = 1, b = -4, c = 3$ : $\Delta = 16 - 12 = 4$, $\sqrt{4} = 2$, racines $x_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$.
Comme $a > 0$, le trinôme est négatif entre ses racines.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 4x + 3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On veut $x^2 - 4x + 3 \leqslant 0$ : l'inégalité est large, les racines sont incluses. $\mathcal{S} = [1\,;3]$.
Contrôle : pour $x = 2$, $4 - 8 + 3 = -1 \leqslant 0$ ✓.
**b.** $a = -1$, $b = 1$, $c = 6$ : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 1 + 24 = 25$, $\sqrt{25} = 5$, racines

$$x_1 = \frac{-1-5}{2\times(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1+5}{-2} = \frac{4}{-2} = -2.$$

Comme $a = -1 < 0$, le trinôme est positif entre ses racines.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2+x+6$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

On veut $-x^2 + x + 6 > 0$ : l'inégalité est stricte, les racines sont exclues. $\mathcal{S} = ]-2\,;3[$.
Contrôle : pour $x = 0$, $6 > 0$ ✓ ; pour $x = 4$, $-16 + 4 + 6 = -6 < 0$, exclu ✓.
*Variante :* multiplier par $-1$ (l'inégalité change de sens) ramène à $x^2 - x - 6 < 0$, étudié à l'exercice 6.

## Corrigé — Exercice 9

**Énoncé.** *Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$. a. Forme canonique et sommet. b. Points d'intersection de la courbe avec les axes. c. Tableau de variations et allure de la courbe.*

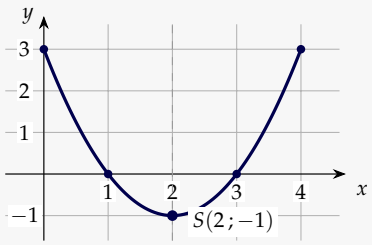
**a.** $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$ : $\alpha = -\dfrac{-4}{2} = 2$ et $\beta = f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$, donc

$$f(x) = (x-2)^2 - 1.$$

Le sommet est $S(2\,;-1)$ ; comme $a > 0$, c'est le minimum de $f$.
**b.** *Avec l'axe des ordonnées :* on prend $x = 0$ : $f(0) = 3$. Le point est $(0\,;3)$.
*Avec l'axe des abscisses :* on résout $f(x) = 0$. Avec la forme canonique, $(x-2)^2 - 1 = 0 \iff (x-2)^2 = 1 \iff x - 2 = -1$ ou $x - 2 = 1$, soit $x = 1$ ou $x = 3$ (le discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ donne les mêmes racines). Les points sont $(1\,;0)$ et $(3\,;0)$.
**c.** Comme $a > 0$, $f$ est décroissante sur $]-\infty\,;2]$ puis croissante sur $[2\,;+\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | |

Pour tracer l'allure de la courbe, on place le sommet $S(2\,;-1)$, les points $(1\,;0)$, $(3\,;0)$ et $(0\,;3)$, puis le symétrique $(4\,;3)$ de ce dernier par rapport à l'axe de symétrie $x = 2$.



## Corrigé — Exercice 10

**Énoncé.** *Déterminer les valeurs du réel $m$ pour lesquelles l'équation $x^2 + mx + 9 = 0$ admet une unique solution, et préciser cette solution.*

Ici $a = 1$, $b = m$, $c = 9$, donc $\Delta = m^2 - 4 \times 1 \times 9 = m^2 - 36$.
Une équation du second degré admet une unique solution si et seulement si $\Delta = 0$ :

$$m^2 - 36 = 0 \iff m^2 = 36 \iff m = -6 \text{ ou } m = 6.$$

La solution unique est alors la racine double $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{m}{2}$.
**Si $m = 6$ :** l'équation s'écrit $x^2 + 6x + 9 = 0$, soit $(x+3)^2 = 0$ : l'unique solution est $x = -3$.
**Si $m = -6$ :** l'équation s'écrit $x^2 - 6x + 9 = 0$, soit $(x-3)^2 = 0$ : l'unique solution est $x = 3$.
*Remarque.* Pour $-6 < m < 6$, $\Delta < 0$ et l'équation n'a aucune solution ; pour $m < -6$ ou $m > 6$, elle en a deux.

## Corrigé — Exercice 11

**Énoncé.** *Un rectangle a pour périmètre 40 m ; $x$ désigne sa largeur. a. Longueur, aire $A(x)$ et valeurs possibles de $x$. b. Valeur de $x$ rendant l'aire maximale, et cette aire. c. Nature du rectangle obtenu.*

**a.** Le périmètre vaut $2 \times (\text{largeur} + \text{longueur}) = 40$, donc largeur + longueur $= 20$ et la longueur vaut $20 - x$.
L'aire est $A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$, soit $A(x) = -x^2 + 20x$.
Une largeur et une longueur sont strictement positives : $x > 0$ et $20 - x > 0$, c'est-à-dire $x \in ]0\,;20[$.
(Si l'on impose de plus que la largeur ne dépasse pas la longueur, $x \leqslant 20 - x$ donne $x \in ]0\,;10]$.)
**b.** $A$ est un trinôme avec $a = -1 < 0$ : il admet un maximum, atteint au sommet d'abscisse

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2 \times (-1)} = 10.$$

Ce maximum vaut $A(10) = 10 \times (20 - 10) = 100$. L'aire maximale est de **100 m²**, obtenue pour $x = 10$ m.
On peut aussi écrire la forme canonique $A(x) = -(x-10)^2 + 100$ : comme $-(x-10)^2 \leqslant 0$, on a $A(x) \leqslant 100$, avec égalité pour $x = 10$.
**c.** Pour $x = 10$, la longueur vaut $20 - 10 = 10$ : le rectangle d'aire maximale est un **carré** de côté 10 m.
C'est un résultat général : à périmètre fixé, le rectangle d'aire maximale est le carré.

## Corrigé — Exercice 12

**Énoncé.** *Soit $P(x) = 2x^2 - 5x - 3$. a. Résoudre $P(x) = 0$ et factoriser $P(x)$. b. Tableau de signes de $P$. c. Résoudre $\frac{2x^2-5x-3}{x-1} \leqslant 0$.*

**a.** $a = 2$, $b = -5$, $c = -3$ : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49$ et $\sqrt{49} = 7$.

$$x_1 = \frac{5-7}{2 \times 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{1}{2}\,;3\right\}$, et d'après $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ :

$$P(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3) = (2x+1)(x-3).$$

Contrôle : $(2x+1)(x-3) = 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x^2 - 5x - 3$ ✓.
**b.** Comme $a = 2 > 0$, $P$ est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**c.** Le quotient n'est défini que si $x-1\neq 0$, c'est-à-dire pour $x\neq 1$ : 1 est la **valeur interdite**.
Le signe de $x-1$ : négatif pour $x<1$, nul en 1, positif pour $x>1$. On combine avec le signe de $P(x)$ ; la double barre signale la valeur interdite.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $\dfrac{P(x)}{x-1}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Le quotient est négatif ou nul sur

$$\mathcal{S}=\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right]\cup\,]1\,;3]\,.$$

Les racines $-\dfrac{1}{2}$ et 3 sont incluses (le quotient y est nul, et l'inégalité est large) ; la valeur 1 est exclue.
Contrôle : $x=-1$ donne $\dfrac{2+5-3}{-2}=-2\leqslant 0$ ✓ ; $x=0$ donne $\dfrac{-3}{-1}=3>0$, exclu ✓ ; $x=2$ donne $\dfrac{8-10-3}{1}=-5\leqslant 0$ ✓ ; $x=4$ donne $\dfrac{32-20-3}{3}=3>0$, exclu ✓.

## Corrigé — Exercice 13

**Énoncé.** *Déterminer deux nombres réels dont la somme vaut* 12 *et le produit* 27.

Deux nombres de somme $S$ et de produit $P$ sont les solutions de l'équation $x^2-Sx+P=0$. Ici, on résout

$$x^2-12x+27=0.$$

$\Delta=(-12)^2-4\times 1\times 27=144-108=36$ et $\sqrt{36}=6$, donc

$$x_1=\frac{12-6}{2}=3\qquad\text{et}\qquad x_2=\frac{12+6}{2}=9.$$

Les deux nombres cherchés sont **3** et **9**. Contrôle : $3+9=12$ ✓ et $3\times 9=27$ ✓.
*Pourquoi cette équation ?* Si $u$ et $v$ sont les deux nombres, alors $(x-u)(x-v)=x^2-(u+v)x+uv=x^2-12x+27$.

## Corrigé — Exercice 14

**Énoncé.** *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $x^4-13x^2+36=0$.

C'est une équation *bicarrée* : seules les puissances $x^4=(x^2)^2$ et $x^2$ apparaissent. On pose $X=x^2$, avec la contrainte $X\geqslant 0$. L'équation devient

$$X^2-13X+36=0.$$

$\Delta=(-13)^2-4\times 1\times 36=169-144=25$ et $\sqrt{25}=5$, donc $X=\dfrac{13-5}{2}=4$ ou $X=\dfrac{13+5}{2}=9$.
Ces deux valeurs sont positives, donc chacune convient et fournit deux valeurs de $x$ :

$$x^2=4\iff x=-2\text{ ou }x=2,\qquad x^2=9\iff x=-3\text{ ou }x=3.$$

$$\mathcal{S}=\{-3\,;-2\,;2\,;3\}.$$

Contrôle : pour $x=2$, $16-13\times 4+36=16-52+36=0$ ✓ ; pour $x=-3$, $81-13\times 9+36=81-117+36=0$ ✓.
*Remarque.* Si l'une des valeurs de $X$ avait été négative, elle n'aurait donné aucune solution en $x$.

### Corrigé — Exercice 15

**Énoncé.** *Soit $f(x)=x^2-2x$ et $g(x)=x+4$, de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}_g$. a. Abscisses des points d'intersection. b. Position relative des deux courbes.*

**a.** Un point est commun aux deux courbes lorsque $f(x)=g(x)$ :

$$x^2-2x=x+4 \iff x^2-2x-x-4=0 \iff x^2-3x-4=0.$$

$\Delta=(-3)^2-4\times 1\times(-4)=9+16=25$ et $\sqrt{25}=5$, donc $x_1=\dfrac{3-5}{2}=-1$ et $x_2=\dfrac{3+5}{2}=4$.
Les points d'intersection ont pour abscisses $-1$ et $4$ ; leurs ordonnées sont $g(-1)=3$ et $g(4)=8$, soit les points $(-1\,;3)$ et $(4\,;8)$.
Contrôle : $f(-1)=1+2=3$ ✓ et $f(4)=16-8=8$ ✓.
**b.** La position relative est donnée par le signe de la différence

$$f(x)-g(x)=x^2-3x-4=(x+1)(x-4).$$

Ce trinôme a pour coefficient dominant $a=1>0$ : il est positif à l'extérieur de ses racines $-1$ et $4$, négatif entre elles.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Conclusion : $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de $\mathcal{D}_g$ sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]4\,;+\infty[$, **au-dessous** sur $]-1\,;4[$, et les deux courbes se coupent aux points $(-1\,;3)$ et $(4\,;8)$.
Contrôle : pour $x=0$, $f(0)=0<g(0)=4$, la parabole est bien en dessous ✓.

## Série C ⋆⋆⋆ — Approfondissement

### Corrigé — Exercice 16

**Énoncé.** *Soit $f_m(x)=x^2+(m-2)x+m$. a. Exprimer $\Delta(m)$. b. Valeurs de $m$ pour lesquelles $f_m$ a deux racines distinctes. c. Valeurs de $m$ pour lesquelles $f_m$ n'a aucune racine.*

**a.** Ici $a=1$, $b=m-2$ et $c=m$, donc

$$\Delta(m)=(m-2)^2-4\times 1\times m=m^2-4m+4-4m=m^2-8m+4.$$

**b.** $f_m$ admet deux racines distinctes si et seulement si $\Delta(m)>0$. On étudie donc le signe du trinôme $m^2-8m+4$ (en la variable $m$).
Son discriminant vaut $(-8)^2-4\times 1\times 4=64-16=48$, et $\sqrt{48}=\sqrt{16\times 3}=4\sqrt{3}$. Ses racines sont

$$m_1=\frac{8-4\sqrt{3}}{2}=4-2\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad m_2=\frac{8+4\sqrt{3}}{2}=4+2\sqrt{3}.$$

Son coefficient dominant est $1>0$ : il est positif à l'extérieur de ses racines.

| $m$ | $-\infty$ | | $4-2\sqrt{3}$ | | $4+2\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta(m)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$f_m$ a deux racines distinctes pour $m \in \left]-\infty\,;4-2\sqrt{3}\right[ \cup \left]4+2\sqrt{3}\,;+\infty\right[$, soit environ $m < 0{,}54$ ou $m > 7{,}46$.
**c.** $f_m$ n'a aucune racine si et seulement si $\Delta(m) < 0$, c'est-à-dire pour $m \in \left]4-2\sqrt{3}\,;4+2\sqrt{3}\right[$.
Pour $m = 4-2\sqrt{3}$ ou $m = 4+2\sqrt{3}$, $\Delta(m) = 0$ et $f_m$ admet une racine double.
Contrôle avec $m = 4$ : $\Delta(4) = 16-32+4 = -12 < 0$, et $f_4(x) = x^2+2x+4 = (x+1)^2+3 > 0$ n'a effectivement pas de racine ✓.

## Corrigé — Exercice 17

**Énoncé.** *Soit $f(x) = x^2 - 6x + 11$. a. Démontrer que $f(x) > 0$ pour tout réel $x$, de deux façons. b. Minimum de $f$ et abscisse en laquelle il est atteint.*

**a.** *Première méthode, par le discriminant.* $a = 1$, $b = -6$, $c = 11$ : $\Delta = (-6)^2 - 4\times 1\times 11 = 36-44 = -8 < 0$. Le trinôme n'a pas de racine, il ne change donc jamais de signe et reste du signe de $a = 1 > 0$ : pour tout réel $x$, $f(x) > 0$.
*Seconde méthode, par la forme canonique.* $\alpha = -\dfrac{-6}{2} = 3$ et $\beta = f(3) = 9-18+11 = 2$, donc

$$f(x) = (x-3)^2 + 2.$$

Pour tout réel $x$, $(x-3)^2 \geqslant 0$, donc $f(x) \geqslant 2 > 0$.
**b.** La forme canonique donne directement le minimum : $f(x) \geqslant 2$ pour tout $x$, avec égalité si et seulement si $(x-3)^2 = 0$, c'est-à-dire $x = 3$.
Le minimum de $f$ vaut **2** et il est atteint en $x = 3$.
*Remarque.* La seconde méthode est plus riche : elle prouve la positivité *et* localise le minimum, alors que le discriminant ne renseigne que sur le signe.

## Corrigé — Exercice 18

**Énoncé.** *Le bénéfice, en milliers d'euros, pour $x$ centaines d'articles ($0 \leqslant x \leqslant 60$) est $B(x) = -0{,}5x^2 + 30x - 250$. a. Bénéfice pour 2 000 articles. b. Résoudre $B(x) = 0$ ; productions bénéficiaires. c. Production rendant le bénéfice maximal, et ce bénéfice. d. Productions pour lesquelles le bénéfice dépasse 150 000 euros.*

**a.** 2 000 articles correspondent à $x = 20$ centaines. On calcule

$$B(20) = -0{,}5\times 20^2 + 30\times 20 - 250 = -0{,}5\times 400 + 600 - 250 = -200 + 600 - 250 = 150.$$

Le bénéfice est de 150 milliers d'euros, soit **150 000** euros.
**b.** $a = -0{,}5$, $b = 30$, $c = -250$ : $\Delta = 30^2 - 4\times(-0{,}5)\times(-250) = 900 - 500 = 400$ et $\sqrt{400} = 20$.

$$x_1 = \frac{-30-20}{2\times(-0{,}5)} = \frac{-50}{-1} = 50 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-30+20}{-1} = \frac{-10}{-1} = 10.$$

(On peut aussi multiplier l'équation par $-2$ : $x^2 - 60x + 500 = 0$, $\Delta = 3\,600 - 2\,000 = 1\,600$, $\sqrt{1\,600} = 40$, $x = \dfrac{60 \pm 40}{2}$, soit 10 ou 50.)
Comme $a = -0{,}5 < 0$, $B(x)$ est positif entre ses racines : $B(x) > 0 \iff 10 < x < 50$.

| $x$ | 0 | | 10 | | 50 | | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

L'entreprise est bénéficiaire pour une production strictement comprise entre 1 000 et 5 000 articles ; pour 1 000 ou 5 000 articles, elle ne gagne ni ne perd rien.
**c.** Le bénéfice est maximal au sommet de la parabole, d'abscisse

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{30}{2\times(-0{,}5)} = -\frac{30}{-1} = 30,$$

qui appartient bien à $[0\,;60]$. Il vaut $B(30) = -0{,}5 \times 900 + 30 \times 30 - 250 = -450 + 900 - 250 = 200$.
Le bénéfice maximal est de **200 000** euros, atteint pour 3 000 articles vendus.
**d.** On résout $B(x) > 150$ :

$$-0{,}5x^2 + 30x - 250 > 150 \iff -0{,}5x^2 + 30x - 400 > 0 \iff x^2 - 60x + 800 < 0,$$

la dernière équivalence s'obtenant en multipliant par $-2$, ce qui change le sens de l'inégalité.
$\Delta = (-60)^2 - 4 \times 1 \times 800 = 3\,600 - 3\,200 = 400$, $\sqrt{400} = 20$, racines $\dfrac{60-20}{2} = 20$ et $\dfrac{60+20}{2} = 40$.
Le trinôme $x^2 - 60x + 800$ a un coefficient dominant positif : il est négatif entre ses racines, donc $B(x) > 150 \iff 20 < x < 40$.
Le bénéfice dépasse 150 000 euros pour une production strictement comprise entre 2 000 et 4 000 articles.
Cohérence : $B(20) = 150$ (question a) et $B(40) = -800 + 1\,200 - 250 = 150$, les bornes donnent exactement 150 000 euros et sont bien exclues ✓.

## Corrigé — Exercice 19

**Énoncé.** *$x_1$ et $x_2$ sont les racines de $x^2 - 5x + 3 = 0$. Sans les calculer, déterminer : a. $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$ ; b. $x_1^2 + x_2^2$ ; c. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ; d. $(x_1 - x_2)^2$.*

On vérifie d'abord que les racines existent : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 25 - 12 = 13 > 0$ ✓.
**a.** Avec $a = 1$, $b = -5$, $c = 3$ : $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 5$ et $P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = 3$.
**b.** On développe $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, d'où

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P = 25 - 6 = 19.$$

**c.** On réduit au même dénominateur (possible car $P = 3 \neq 0$, donc aucune racine n'est nulle) :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} = \frac{5}{3}.$$

**d.** On développe $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$, puis on utilise b :

$$(x_1 - x_2)^2 = 19 - 2 \times 3 = 13, \qquad \text{ou directement} \qquad (x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P = 25 - 12 = 13.$$

*Remarque.* On retrouve la valeur du discriminant : en général, $(x_1 - x_2)^2 = \dfrac{\Delta}{a^2}$, et ici $a = 1$.
Contrôle avec les racines explicites $\dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$ : leur différence vaut $\sqrt{13}$, dont le carré est bien 13 ✓.

## Corrigé — Exercice 20

**Énoncé.** *Soit $a > 0$ et $f(x) = ax^2 + bx + c$ de discriminant $\Delta$. Démontrer que pour tout réel $x$, $f(x) \geqslant -\frac{\Delta}{4a}$, et préciser en quelle valeur de $x$ l'égalité est atteinte.*

**Mise sous forme canonique.** On factorise les termes en $x$ par $a$ (possible car $a \neq 0$) :

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c.$$

On reconnaît le début du carré $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{b^2}{4a^2}$, donc $x^2 + \dfrac{b}{a}x = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2}$ et

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

**Inégalité.** Pour tout réel $x$, $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ ; comme $a>0$, le produit $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ est positif ou nul. En ajoutant $-\dfrac{\Delta}{4a}$ aux deux membres :

$$f(x) \geqslant -\frac{\Delta}{4a}. \qquad \blacksquare$$

**Cas d'égalité.** Il y a égalité si et seulement si $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$, c'est-à-dire (puisque $a \neq 0$) $x+\dfrac{b}{2a}=0$, soit

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

C'est l'abscisse du sommet : la valeur $-\dfrac{\Delta}{4a}$ est le **minimum** de $f$ sur $\mathbb{R}$, atteint en $x=-\dfrac{b}{2a}$.

*Remarque.* Si $a<0$, le produit $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ est négatif ou nul, l'inégalité est renversée et $-\dfrac{\Delta}{4a}$ devient le maximum de $f$.

Contrôle sur l'exercice 17 : $f(x)=x^2-6x+11$ a pour discriminant $\Delta=-8$ et $a=1$, donc le minimum vaut $-\dfrac{-8}{4}=2$, atteint en $x=-\dfrac{-6}{2}=3$ ✓.