Chapitre 1. Activité d'introduction — Corrigés

Tartaglia et la naissance des nombres complexes

Corrigés des exercices 1 à 3

Corrigés

Corrigé — Exercice 1

a. $p = 3, q = -4$: $-\dfrac{q}{2} = 2$ et $\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} = 4 + \dfrac{27}{27} = 5$. La formule donne $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

b. $\left(1+\sqrt{5}\right)^3 = 1 + 3\sqrt{5} + 3\times 5 + 5\sqrt{5} = 16 + 8\sqrt{5}$, donc $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \dfrac{16+8\sqrt{5}}{8} = 2+\sqrt{5}$. De même $\left(1-\sqrt{5}\right)^3 = 16 - 8\sqrt{5}$ et $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 2-\sqrt{5}$.

c. Ainsi $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, d'où $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$.
Contrôle : $1 + 3 - 4 = 0$ ✓. (On aura reconnu le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et son conjugué.)
d. $x^3 + 3x - 4 = (x-1)\left(x^2 + x + 4\right)$: en développant, $x^3 + x^2 + 4x - x^2 - x - 4 = x^3 + 3x - 4$ ✓.
Le trinôme $x^2 + x + 4$ a pour discriminant $1 - 16 = -15 < 0$: il ne s'annule pas. L'unique solution réelle est 1, conformément au cas « $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ ».

Corrigé — Exercice 2

a. $x^3 - 6x - 4 = 0$: $p = -6, q = -4$, $-\dfrac{q}{2} = 2$ et $\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} = 4 - \dfrac{216}{27} = 4 - 8 = -4 < 0$: la formule demande la racine carrée d'un nombre négatif (cas irréductible).
b. En écrivant $\sqrt{-4} = 2\mathrm{i}$: $x = \sqrt[3]{2+2\mathrm{i}} + \sqrt[3]{2-2\mathrm{i}}$.
c. $(-1+\mathrm{i})^3 = (-1)^3 + 3(-1)^2\mathrm{i} + 3(-1)\mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 = -1 + 3\mathrm{i} + 3 - \mathrm{i} = 2 + 2\mathrm{i}$, car $\mathrm{i}^2 = -1$ et $\mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2 \times \mathrm{i} = -\mathrm{i}$. De même $(-1-\mathrm{i})^3 = -1 - 3\mathrm{i} + 3 + \mathrm{i} = 2 - 2\mathrm{i}$.
d. Donc $\sqrt[3]{2+2\mathrm{i}} = -1 + \mathrm{i}$ et $\sqrt[3]{2-2\mathrm{i}} = -1 - \mathrm{i}$, et $x = (-1+\mathrm{i}) + (-1-\mathrm{i}) = -2$.
Contrôle : $(-2)^3 = -8$ et $6 \times (-2) + 4 = -8$ ✓.
e. $x^3 - 6x - 4 = (x+2)\left(x^2 - 2x - 2\right)$ (développer : $x^3 - 2x^2 - 2x + 2x^2 - 4x - 4$ ✓). Le trinôme $x^2 - 2x - 2$ a pour discriminant $4 + 8 = 12 > 0$ et pour racines $\dfrac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$. L'équation a donc **trois** solutions réelles : -2, $1 - \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3}$. C'est exactement le paradoxe du cas irréductible : lorsque $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, il faut passer par i pour atteindre des solutions qui sont toutes réelles.

Corrigé — Exercice 3

a. Avec $x = t + 1$:

$$(t+1)^3 - 3(t+1)^2 + 6(t+1) - 8 = \left(t^3 + 3t^2 + 3t + 1\right) - 3\left(t^2 + 2t + 1\right) + 6t + 6 - 8 = t^3 + 3t - 4.$$

Les termes en t^2 se sont éliminés : c'est le but du changement de variable $x = t - \frac{b}{3a}$ pour une équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
b. D'après l'exercice 1, $t = 1$, donc $x = t + 1 = 2$.
Contrôle : $2^3 - 3 \times 2^2 + 6 \times 2 - 8 = 8 - 12 + 12 - 8 = 0$ ✓.