Chapitre 1. Les nombres complexes

Devoir surveillé n°1 — Corrigé

Durée : 1 heure **Calculatrice autorisée**

Corrigé — Exercice 1

1. $z_1 = 3 + 12\mathrm{i} - 2\mathrm{i} - 8\mathrm{i}^2 = 3 + 10\mathrm{i} + 8 = 11 + 10\mathrm{i}$. *(1 pt)*
2. $(2-\mathrm{i})^2 = 4 - 4\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 3 - 4\mathrm{i}$ et $(1+3\mathrm{i})(1-3\mathrm{i}) = 1^2 + 3^2 = 10$, donc $z_2 = 3 - 4\mathrm{i} - 10 = -7 - 4\mathrm{i}$. *(1 pt)*
3. On multiplie par le conjugué du dénominateur : $z_3 = \dfrac{(3+4\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})} = \dfrac{3+6\mathrm{i}+4\mathrm{i}+8\mathrm{i}^2}{1+4} = \dfrac{-5+10\mathrm{i}}{5} = -1+2\mathrm{i}$. *(1 pt)*
4. $(1+\mathrm{i})^2 = 1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 2\mathrm{i}$, donc $u = \dfrac{2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \dfrac{2\mathrm{i}(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} = \dfrac{4\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2}{5} = \dfrac{2+4\mathrm{i}}{5} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{5}\mathrm{i}$. Donc $\overline{u} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5}\mathrm{i}$ et $|u| = \sqrt{\dfrac{4}{25} + \dfrac{16}{25}} = \dfrac{\sqrt{20}}{5} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ (ou $|u| = \dfrac{|1+\mathrm{i}|^2}{|2+\mathrm{i}|} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$). *(2 pts : forme algébrique 1, conjugué 0,5, module 0,5)*

Corrigé — Exercice 2

1. $z = \dfrac{3+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \dfrac{(3+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{5} = \dfrac{6+3\mathrm{i}+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{5} = \dfrac{5+5\mathrm{i}}{5} = 1+\mathrm{i}$. $\mathcal{S} = \{1+\mathrm{i}\}$. *(1 pt)*
2. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ (x, y réels) : $2z + 3\overline{z} = 2x + 2\mathrm{i}y + 3x - 3\mathrm{i}y = 5x - \mathrm{i}y$. L'équation équivaut à $5x - \mathrm{i}y = 5 - 2\mathrm{i}$, soit (identification des parties réelle et imaginaire) $5x = 5$ et $-y = -2$: $x = 1$, $y = 2$. $\mathcal{S} = \{1+2\mathrm{i}\}$. *(1,5 pt)*
3. $\Delta = 36 - 52 = -16 = (4\mathrm{i})^2 < 0$: deux solutions complexes conjuguées $z = \dfrac{6 \pm 4\mathrm{i}}{2} = 3 \pm 2\mathrm{i}$. $\mathcal{S} = \{3-2\mathrm{i}\,;3+2\mathrm{i}\}$. *(1 pt)*
4. $1+\mathrm{i}$ est solution si et seulement si $(1+\mathrm{i})^2 - 2(1+\mathrm{i}) + m = 0$, soit $2\mathrm{i} - 2 - 2\mathrm{i} + m = 0$, d'où $m = 2$. L'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ est à coefficients réels : l'autre solution est la conjuguée $1-\mathrm{i}$ (on vérifie : somme des racines 2, produit 2). *(1,5 pt)*

Corrigé — Exercice 3

Partie A. Formule du binôme avec $a = 2$, $b = -\mathrm{i}$ et les coefficients $1, 3, 3, 1$: $(2-\mathrm{i})^3 = 2^3 + 3\times 2^2(-\mathrm{i}) + 3\times 2\,(-\mathrm{i})^2 + (-\mathrm{i})^3 = 8 - 12\mathrm{i} - 6 + \mathrm{i} = 2 - 11\mathrm{i}$ (car $(-\mathrm{i})^2 = -1$ et $(-\mathrm{i})^3 = \mathrm{i}$). *(2 pts)*

Partie B. $P(z) = z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45$.
1. $(3\mathrm{i})^2 = -9$, $(3\mathrm{i})^3 = -27\mathrm{i}$, $(3\mathrm{i})^4 = 81$: $P(3\mathrm{i}) = 81 - 4(-27\mathrm{i}) + 14(-9) - 36(3\mathrm{i}) + 45 = 81 + 108\mathrm{i} - 126 - 108\mathrm{i} + 45 = 0$. *(0,5 pt)*
2. P est à coefficients réels, donc pour tout z, $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$; comme $P(3\mathrm{i}) = 0$, $P(-3\mathrm{i}) = \overline{0} = 0$: $-3\mathrm{i}$ est aussi racine. *(0,5 pt)*
3. $3\mathrm{i}$ et $-3\mathrm{i}$ sont racines, donc $P(z)$ est divisible par $(z-3\mathrm{i})(z+3\mathrm{i}) = z^2 + 9$. On développe $(z^2+9)(az^2+bz+c) = az^4 + bz^3 + (c+9a)z^2 + 9bz + 9c$ et l'on identifie avec P : $a = 1$, $b = -4$, $c + 9a = 14$ d'où $c = 5$ (cohérent avec $9b = -36$ et $9c = 45$). Ainsi $P(z) = (z^2+9)(z^2 - 4z + 5)$. *(1 pt)*
4. $P(z) = 0 \iff z^2 + 9 = 0$ ou $z^2 - 4z + 5 = 0$. La première donne $z = \pm 3\mathrm{i}$; pour la seconde, $\Delta = 16 - 20 = -4$, $z = \dfrac{4 \pm 2\mathrm{i}}{2} = 2 \pm \mathrm{i}$. $\mathcal{S} = \{3\mathrm{i}\,;-3\mathrm{i}\,;2+\mathrm{i}\,;2-\mathrm{i}\}$. *(1 pt)*

Corrigé — Exercice 4

1. Réponse b. $|z| = \sqrt{3+1} = 2$ et $z = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$: $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$, donc $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$. *(1 pt)*
2. Réponse a. $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 4\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$. *(1 pt)*
3. Réponse d. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4 - \pi/3)} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/12}$. *(1 pt)* **4. Réponse c.** $\sqrt{3}+\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$, donc $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^6 = 2^6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -64$. *(1 pt)*
5. Réponse a. $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^2 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta} = 2\cos(2\theta)$ (formule d'Euler). *(1 pt)*