Chapitre 1. Fiche d'exercices n°1 — Corrigés

Les nombres complexes

Corrigés détaillés des 28 exercices

Corrigés

Corrigé — Exercice 1

a. $3-2+\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$.
b. $10+15\mathrm{i}$.
c. $3\mathrm{i}-4\mathrm{i}^2=4+3\mathrm{i}$.
d. $8+10\mathrm{i}-12\mathrm{i}-15\mathrm{i}^2=23-2\mathrm{i}$.
e. $1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=2\mathrm{i}$.
f. $4+20\mathrm{i}+25\mathrm{i}^2=-21+20\mathrm{i}$.
g. $9-16\mathrm{i}^2=9+16=25$.
h. $9-12\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2=5-12\mathrm{i}$.

Pour **g** : $(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})=z\overline{z}$ avec $z=3-4\mathrm{i}$, produit d'un complexe par son conjugué : le résultat $|z|^2=3^2+4^2=25$ est un réel positif.

Corrigé — Exercice 2

a. $\mathrm{i}^3=\mathrm{i}^2\times\mathrm{i}=-\mathrm{i}$.
b. $\mathrm{i}^4=\left(\mathrm{i}^2\right)^2=1$.
c. $27=4\times6+3$: $\mathrm{i}^{27}=\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$.
d. $2026=4\times506+2$: $\mathrm{i}^{2026}=\mathrm{i}^2=-1$.
e. $(3\mathrm{i})^3=27\,\mathrm{i}^3=-27\mathrm{i}$.
f. $(1-\mathrm{i})^2=1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=-2\mathrm{i}$.
g. $(1-\mathrm{i})^4=\left((1-\mathrm{i})^2\right)^2=(-2\mathrm{i})^2=4\mathrm{i}^2=-4$.
h. $\dfrac{1}{\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=\dfrac{\mathrm{i}}{-1}=-\mathrm{i}$.

Pour **h**, on peut aussi remarquer que $\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})=-\mathrm{i}^2=1$: l'inverse de i est $-\mathrm{i}$.

Corrigé — Exercice 3

z	$3+2\mathrm{i}$	$5-4\mathrm{i}$	7	i	$-5\mathrm{i}$	$2-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$	$(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=3+\mathrm{i}$	$\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$
$\mathrm{Re}(z)$	3	5	7	0	0	2	3	0
$\mathrm{Im}(z)$	2	-4	0	1	-5	$-\sqrt{3}$	1	-1
$\overline{z}$	$3-2\mathrm{i}$	$5+4\mathrm{i}$	7	$-\mathrm{i}$	$5\mathrm{i}$	$2+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$	$3-\mathrm{i}$	i

Pour **g** : $(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=2-\mathrm{i}+2\mathrm{i}-\mathrm{i}^2=3+\mathrm{i}$. Un réel est son propre conjugué ; le conjugué d'un imaginaire pur est son opposé.

Corrigé — Exercice 4

On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur ; le nouveau dénominateur est $|\text{dénominateur}|^2$, un réel.

a. $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}=\dfrac{(1+2\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{9+1}=\dfrac{3+\mathrm{i}+6\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{10}=\dfrac{1+7\mathrm{i}}{10}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{7}{10}\mathrm{i}$.

b. $\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{1+1}=\dfrac{2\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{2}=\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=-1+\mathrm{i}$.

c. $\dfrac{3+3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}}=\dfrac{(3+3\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})}{25+4}=\dfrac{15-6\mathrm{i}+15\mathrm{i}-6\mathrm{i}^2}{29}=\dfrac{21+9\mathrm{i}}{29}=\dfrac{21}{29}+\dfrac{9}{29}\mathrm{i}$.

d. $\dfrac{5+\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} = \dfrac{(5+\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{9+16} = \dfrac{15+20\mathrm{i}+3\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2}{25} = \dfrac{11+23\mathrm{i}}{25} = \dfrac{11}{25}+\dfrac{23}{25}\mathrm{i}.$

e. $\dfrac{7\mathrm{i}}{3-5\mathrm{i}} = \dfrac{7\mathrm{i}(3+5\mathrm{i})}{9+25} = \dfrac{21\mathrm{i}+35\mathrm{i}^2}{34} = \dfrac{-35+21\mathrm{i}}{34} = -\dfrac{35}{34}+\dfrac{21}{34}\mathrm{i}.$

f. $\dfrac{1}{3-2\mathrm{i}} = \dfrac{3+2\mathrm{i}}{9+4} = \dfrac{3}{13}+\dfrac{2}{13}\mathrm{i}.$

Corrigé — Exercice 5

a. Produit nul : $2z-3\mathrm{i}=0$ ou $z+1+\mathrm{i}=0$, donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\,;-1-\mathrm{i}\right\}$.

b. Avec $z = x+\mathrm{i}y$: $x-\mathrm{i}y = 2x+2\mathrm{i}y+3-3\mathrm{i}$. Parties réelles : $x = 2x+3$, donc $x=-3$. Parties imaginaires : $-y = 2y-3$, donc $y=1$. $\mathcal{S}=\{-3+\mathrm{i}\}$.
Contrôle : $2z+3-3\mathrm{i} = -6+2\mathrm{i}+3-3\mathrm{i} = -3-\mathrm{i} = \overline{z}$ ✓.

c. $z = \dfrac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(3-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = \dfrac{3-3\mathrm{i}-\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{2} = \dfrac{2-4\mathrm{i}}{2} = 1-2\mathrm{i}$. Contrôle : $(1+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}) = 1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2 = 3-\mathrm{i}$ ✓.

d. Par identification : $2x-y=1$ et $x+y=-3$. En additionnant : $3x=-2$, donc $x=-\dfrac{2}{3}$ et $y=-3-x=-\dfrac{7}{3}$.

Corrigé — Exercice 6

a. $\Delta = 1-4=-3<0$: $z = \dfrac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, soit $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\,;\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}$.

b. $\Delta = 4-40=-36=(6\mathrm{i})^2$: $z = \dfrac{-2\pm 6\mathrm{i}}{4} = -\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.

c. $\Delta = (2\sqrt{5})^2 - 4\times(-1)\times(-4) = 20-16 = 4>0$: les solutions sont *réelles*, $z = \dfrac{-2\sqrt{5}\pm 2}{-2} = \sqrt{5}\mp 1$, soit $\mathcal{S}=\{\sqrt{5}-1\,;\sqrt{5}+1\}$. Un discriminant se calcule avant de conclure !

d. $z^2 = -\dfrac{5}{3}$, donc $z = \pm\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{5}{3}} = \pm\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

e. $\Delta = 16-52=-36$: $z = \dfrac{4\pm 6\mathrm{i}}{2} = 2\pm 3\mathrm{i}$.

f. $z^2=-9=(3\mathrm{i})^2$: $z=\pm 3\mathrm{i}$.

Corrigé — Exercice 7

On calcule $r=|z|$ puis θ tel que $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$.

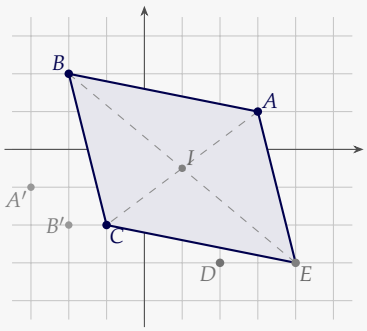
z	$3+3\mathrm{i}$	$-\sqrt{3}+\mathrm{i}$	$-2\mathrm{i}$	-5	$1-\mathrm{i}$	$\sqrt{3}-\mathrm{i}$
$\lvert z\rvert$	$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$	$\sqrt{3+1}=2$	2	5	$\sqrt{2}$	2
$(\cos\theta\,;\sin\theta)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$	$(0\,;-1)$	$(-1\,;0)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$
$\arg z$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$
forme expo.	$3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$	$2\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/6}$	$2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$	$5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$	$\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$	$2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$

Corrigé — Exercice 8

a. $z_A = 3+\mathrm{i}$, $z_B = -2+2\mathrm{i}$, $z_C = -1-2\mathrm{i}$, $z_D = 2-3\mathrm{i}$.
b. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -5+\mathrm{i}$; $z_{\overrightarrow{CD}} = z_D - z_C = 3-\mathrm{i}$.
c. $z_I = \dfrac{z_A+z_C}{2} = \dfrac{2-\mathrm{i}}{2} = 1-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.
d. Symétrie centrale : $z_{A'} = -z_A = -3-\mathrm{i}$.
Symétrie d'axe $(O\,;\vec{u})$: $z_{B'} = \overline{z_B} = -2-2\mathrm{i}$.
e. $ABCE$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$, soit $z_B - z_A = z_C - z_E$, d'où $z_E = z_A + z_C - z_B$:

$$z_E = (3+\mathrm{i}) + (-1-2\mathrm{i}) - (-2+2\mathrm{i}) = 4-3\mathrm{i}.$$

Contrôle : les diagonales $[AC]$ et $[BE]$ ont le même milieu, $\dfrac{z_B+z_E}{2} = \dfrac{2-\mathrm{i}}{2} = z_I$ ✓.

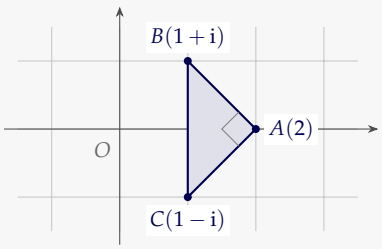


Corrigé — Exercice 9

a. $P(2) = 8-16+12-4 = 0$.
b. $(z-2)(az^2+bz+c) = az^3+(b-2a)z^2+(c-2b)z-2c$. Par identification : $a=1$; $b-2=-4$ donc $b=-2$; $-2c=-4$ donc $c=2$; contrôle du terme en z : $c-2b = 2+4 = 6$ ✓. Donc $P(z) = (z-2)\left(z^2-2z+2\right)$.
c. $z^2-2z+2=0$: $\Delta = 4-8 = -4$, $z = \dfrac{2\pm 2\mathrm{i}}{2} = 1\pm\mathrm{i}$. $\mathcal{S} = \{2\,;1-\mathrm{i}\,;1+\mathrm{i}\}$.
d. $A(2)$, $B(1+\mathrm{i})$, $C(1-\mathrm{i})$.

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = \frac{-1-\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}} = \frac{(-1-\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}{1+1} = \frac{1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{2} = \mathrm{i}.$$

Le quotient vaut i : $AC = AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. Le triangle est **rectangle isocèle en** A.
Contrôle : $AB = AC = \sqrt{2}$, $BC = 2$ et $AB^2+AC^2 = 4 = BC^2$ ✓.



Corrigé — Exercice 10

a. Module, puis couple $(\cos\theta\,;\sin\theta)$:

- $2+2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$
- $-2+2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}$
- $3\mathrm{i} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$
- $-\sqrt{3}-\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\pi/6}$
- $-4 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$
- $1-\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$

Par exemple $-\sqrt{3}-\mathrm{i} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;-\frac{1}{2}\right) = \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\,;\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$: le point est dans le troisième quadrant ; de même $-2+2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\cos\frac{3\pi}{4}\,;\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.
b. $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r\cos\theta + \mathrm{i}\,r\sin\theta$:

- $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$; $\qquad 2\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4} = 2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = -\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}$;

- $2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} = 2\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$; $\qquad \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$;
- $6\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} = 6\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = -3 + 3\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

Corrigé — Exercice 11

a. $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/3+\pi/4)} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/12}$; $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/3-\pi/4)} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}$;
$z_1^6 = 64\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 64$; $z_2^4 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -4$.
b. $z_1 = 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = 1 + \mathrm{i}$, donc

$$z_1 z_2 = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})(1 + \mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}\sqrt{3} + \mathrm{i}^2\sqrt{3} = (1 - \sqrt{3}) + \mathrm{i}(1 + \sqrt{3}).$$

c. La forme exponentielle donne $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right)$; par unicité de la forme algébrique, on identifie avec le résultat de **b** :

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \qquad \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Cohérence : $\frac{7\pi}{12} \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$, donc cosinus négatif et sinus positif ✓.
De plus $(\sqrt{2}-\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 = 2\times(2+6) = 16$, donc $\cos^2\frac{7\pi}{12} + \sin^2\frac{7\pi}{12} = \frac{16}{16} = 1$ ✓.

Corrigé — Exercice 12

On pose $z = x + \mathrm{i}y$, avec x, y réels.
a. $z + 2\bar{z} = x + \mathrm{i}y + 2x - 2\mathrm{i}y = 3x - \mathrm{i}y = 6 - 3\mathrm{i}$, donc $x = 2$ et $y = 3$: $z = 2 + 3\mathrm{i}$.
b. $2z - \bar{z} = 2x + 2\mathrm{i}y - x + \mathrm{i}y = x + 3\mathrm{i}y = 1 + 6\mathrm{i}$, donc $x = 1$ et $y = 2$: $z = 1 + 2\mathrm{i}$.
c. $z\bar{z} + 2z = x^2 + y^2 + 2x + 2\mathrm{i}y = 3 + 2\mathrm{i}$. Parties imaginaires : $2y = 2$, donc $y = 1$. Parties réelles : $x^2 + 1 + 2x = 3$, soit $x^2 + 2x - 2 = 0$, $\Delta = 12$, $x = -1 \pm \sqrt{3}$.
Deux solutions : $z = -1 - \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $z = -1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}$.
Contrôle avec $z = -1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}$: $z\bar{z} = (\sqrt{3}-1)^2 + 1 = 5 - 2\sqrt{3}$ et $2z = -2 + 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$; la somme vaut $3 + 2\mathrm{i}$ ✓.

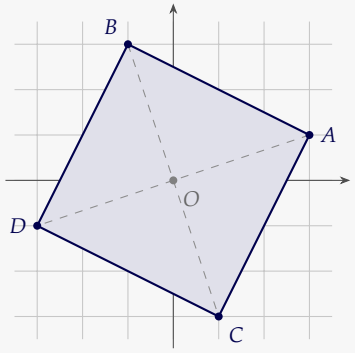
Corrigé — Exercice 13

a. et **d.** Voir la figure.
b. $AB = |z_B - z_A| = |-4 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;
$AC = |z_C - z_A| = |-2 - 4\mathrm{i}| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $\quad BC = |z_C - z_B| = |2 - 6\mathrm{i}| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.
c. $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{-2-4\mathrm{i}}{-4+2\mathrm{i}} = \dfrac{(-2-4\mathrm{i})(-4-2\mathrm{i})}{16+4} = \dfrac{8+4\mathrm{i}+16\mathrm{i}+8\mathrm{i}^2}{20} = \dfrac{20\mathrm{i}}{20} = \mathrm{i}$.
Module 1 et argument $\dfrac{\pi}{2}$: $AC = AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, le triangle est **rectangle isocèle en** A.
(Contrôle : $AB^2 + AC^2 = 20 + 20 = 40 = BC^2$ ✓.)
d. $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, soit $z_B - z_A = z_D - z_C$, d'où

$$z_D = z_B + z_C - z_A = (-1 + 3\mathrm{i}) + (1 - 3\mathrm{i}) - (3 + \mathrm{i}) = -3 - \mathrm{i}.$$

Ce parallélogramme possède un angle droit et deux côtés consécutifs égaux en A : c'est un **carré**.

e. Le centre du carré est le milieu de la diagonale $[AD]$: $\dfrac{z_A+z_D}{2}=\dfrac{(3+\mathrm{i})+(-3-\mathrm{i})}{2}=0$. C'est bien O ; on le vérifie sur l'autre diagonale : $\dfrac{z_B+z_C}{2}=\dfrac{(-1+3\mathrm{i})+(1-3\mathrm{i})}{2}=0$ ✓.



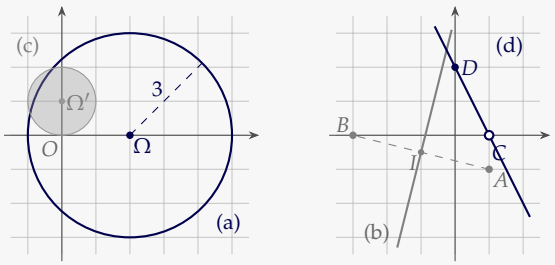
Corrigé — Exercice 14

a. $|z-2|=\Omega M$ avec $\Omega(2)$: l'ensemble est le **cercle** de centre $\Omega(2)$ et de rayon 3.

b. $|z-(1-\mathrm{i})|=|z-(-3)|$, soit $AM=BM$ avec $A(1-\mathrm{i})$ et $B(-3)$: c'est la **médiatrice** de $[AB]$. Elle passe par le milieu I de $[AB]$, d'affixe $\dfrac{(1-\mathrm{i})+(-3)}{2}=-1-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$, et elle est perpendiculaire à (AB).

c. $|z-\mathrm{i}|\leqslant 1$: **disque fermé** de centre $\Omega'(\mathrm{i})$ et de rayon 1 — il est tangent à l'axe des réels en O.

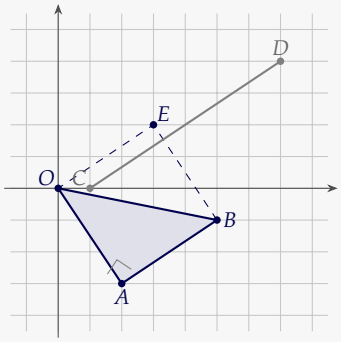
d. Avec $C(1)$ et $D(2\mathrm{i})$, le quotient $\dfrac{z-2\mathrm{i}}{z-1}=\dfrac{z-z_D}{z-z_C}$ a pour argument $\left(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{DM}\right)$ (méthode 8.2) ; il est réel si et seulement si cet angle vaut 0 ou π, c'est-à-dire si M, C, D sont alignés. L'ensemble est la **droite** (CD) **privée de** C (en D le quotient vaut 0, qui est réel : D en fait partie).



Corrigé — Exercice 15

a. On calcule le quotient :

$$\frac{z_O-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-2+3\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}}=\frac{(-2+3\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})}{9+4}$$
$$=\frac{-6+4\mathrm{i}+9\mathrm{i}-6\mathrm{i}^2}{13}=\frac{13\mathrm{i}}{13}=\mathrm{i}.$$



Il a pour module $\dfrac{AO}{AB}=1$ et pour argument $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}\right)=\dfrac{\pi}{2}$: le triangle OAB est **rectangle isocèle en** A.

Contrôle par les longueurs : $OA=|2-3\mathrm{i}|=\sqrt{13}$, $AB=|3+2\mathrm{i}|=\sqrt{13}$ et $OB=|5-\mathrm{i}|=\sqrt{26}$; on a bien $OA=AB$ et $OA^2+AB^2=26=OB^2$ (réciproque de Pythagore) ✓.

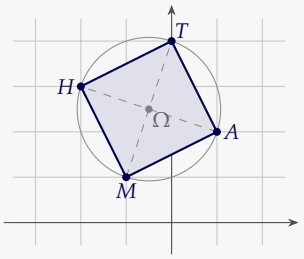
b. $z_D-z_C=6+4\mathrm{i}=2(3+2\mathrm{i})=2(z_B-z_A)$, donc $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$: les vecteurs sont colinéaires et $(AB)\parallel(CD)$.

c. Le triangle OAB étant rectangle isocèle en A, il suffit que $OABE$ soit un parallélogramme : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{EB}$, soit $z_A - z_O = z_B - z_E$, d'où $z_E = z_B - z_A = 3 + 2\mathrm{i}$.

Corrigé — Exercice 16

a. La figure suggère un triangle rectangle isocèle en M.
b. On calcule le quotient :

$$\frac{z_H - z_M}{z_A - z_M} = \frac{-1+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{(-1+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{4+1}$$
$$= \frac{-2+\mathrm{i}+4\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2}{5} = \frac{5\mathrm{i}}{5} = \mathrm{i}.$$



Donc $MH = MA$ et $\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MH}\right) = \dfrac{\pi}{2}$: le triangle MAH est **rectangle isocèle en** M.

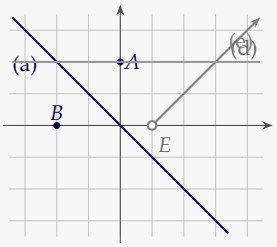
c. Il suffit que $MATH$ soit un parallélogramme : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{HT}$, soit $z_A - z_M = z_T - z_H$, d'où

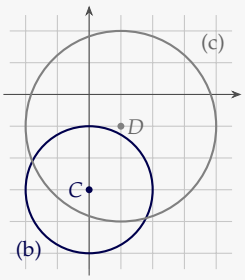
$$z_T = z_A + z_H - z_M = (1+2\mathrm{i}) + (-2+3\mathrm{i}) - (-1+\mathrm{i}) = 4\mathrm{i}.$$

d. Le centre est le milieu de la diagonale $[MT]$: $z_\Omega = \dfrac{(-1+\mathrm{i})+4\mathrm{i}}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\mathrm{i}$ (contrôle : milieu de $[AH]$, $\dfrac{(1+2\mathrm{i})+(-2+3\mathrm{i})}{2} = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}\mathrm{i}$ ✓). Le rayon du cercle circonscrit est $\Omega M = \dfrac{MT}{2} = \dfrac{|4\mathrm{i}-(-1+\mathrm{i})|}{2} = \dfrac{|1+3\mathrm{i}|}{2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Corrigé — Exercice 17

a. $|z-2\mathrm{i}| = |z+2| \iff AM = BM$ avec $A(2\mathrm{i})$ et $B(-2)$: **médiatrice** de $[AB]$. Comme $OA = OB = 2$, elle passe par O ; par le calcul, $x^2 + (y-2)^2 = (x+2)^2 + y^2 \iff -4y+4 = 4x+4 \iff y = -x$.
b. $\mathrm{i}z - 3 = \mathrm{i}(z+3\mathrm{i})$ car $\mathrm{i}\times 3\mathrm{i} = -3$; donc $|\mathrm{i}z-3| = |\mathrm{i}|\,|z+3\mathrm{i}| = |z+3\mathrm{i}|$ et la condition s'écrit $|z-(-3\mathrm{i})| = 2$: **cercle** de centre $C(-3\mathrm{i})$ et de rayon 2.
c. $\overline{z}-1-\mathrm{i} = \overline{z-1+\mathrm{i}}$ et $|\overline{w}| = |w|$, donc la condition s'écrit $|z-(1-\mathrm{i})| = 3$: **cercle** de centre $D(1-\mathrm{i})$ et de rayon 3.
d. $\arg(z-1) = \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{EM}\right)$ avec $E(1)$ et $M \neq E$: l'ensemble est la **demi-droite** d'origine E, privée de E, dirigée par le vecteur d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ — les points $M(x\,;y)$ tels que $y = x-1$ et $x > 1$.
e. $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$, donc $z - \overline{z} = 4\mathrm{i} \iff \mathrm{Im}(z) = 2$: **droite** d'équation $y = 2$.



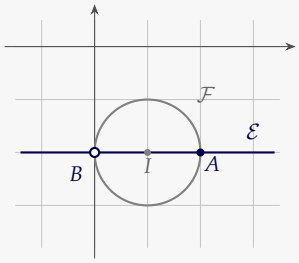


Corrigé — Exercice 18

a. $z' = \dfrac{z - z_A}{z - z_B}$, donc, pour $M \neq A$ et $M \neq B$: $|z'| = \dfrac{AM}{BM}$ et $\arg z' = \left(\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{AM}\right)\ [2\pi]$.
b. z' est réel si et seulement si $z' = 0$ ($M = A$) ou $\left(\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{AM}\right) \equiv 0\ [\pi]$, c'est-à-dire M, A, B alignés : $\mathcal{E}$ est la **droite** (AB) **privée de** B.
z' est imaginaire pur si et seulement si $M = A$ ou $\left(\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{AM}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, c'est-à-dire le triangle AMB rectangle en M : $\mathcal{F}$ est le **cercle de diamètre** $[AB]$ **privé de** B — centre le milieu $I(1-2\mathrm{i})$ de $[AB]$, rayon $\dfrac{AB}{2} = 1$.
c. Avec $z = x + \mathrm{i}y$: $z' = \dfrac{(x-2) + \mathrm{i}(y+2)}{x + \mathrm{i}(y+2)}$. On multiplie par le conjugué du dénominateur :

$$z' = \frac{\left[(x-2) + \mathrm{i}(y+2)\right]\left[x - \mathrm{i}(y+2)\right]}{x^2 + (y+2)^2} = \frac{x^2 - 2x + (y+2)^2 + 2\mathrm{i}\,(y+2)}{x^2 + (y+2)^2}.$$

$z' \in \mathbb{R} \iff y + 2 = 0 \iff y = -2$ (avec $M \neq B$) : c'est bien la droite (AB), dont tous les points ont pour ordonnée -2 ✓.
$z' \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff x^2 - 2x + (y+2)^2 = 0 \iff (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$: cercle de centre $I(1\,;-2)$ et de rayon 1, privé de B ✓.
d.

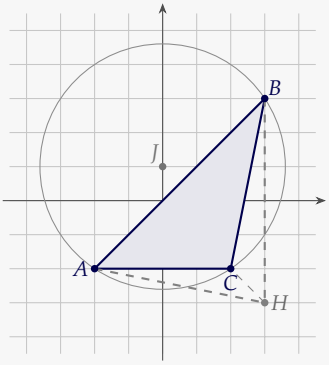


Corrigé — Exercice 19

b. $JA^2 = |-2-3\mathrm{i}|^2 = 4 + 9 = 13$, $JB^2 = |3+2\mathrm{i}|^2 = 13$ et $JC^2 = |2-3\mathrm{i}|^2 = 13$: $JA = JB = JC = \sqrt{13}$, donc J est le centre du cercle circonscrit à ABC, de rayon $\sqrt{13}$.
c. On calcule :

$$\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A} = \frac{1+5\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}} = \frac{(1+5\mathrm{i})(5+\mathrm{i})}{25+1}$$
$$= \frac{5 + \mathrm{i} + 25\mathrm{i} + 5\mathrm{i}^2}{26} = \frac{26\mathrm{i}}{26} = \mathrm{i}.$$

Ce quotient est imaginaire pur : son argument $\left(\overrightarrow{AH}\,;\overrightarrow{CB}\right)$ vaut $\dfrac{\pi}{2}$, donc $(AH) \perp (BC)$.



d. $\dfrac{z_H - z_B}{z_C - z_A} = \dfrac{-6\mathrm{i}}{4} = -\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$, imaginaire pur : $(BH) \perp (AC)$. Le point H appartient aux hauteurs issues de A et de B : c'est l'**orthocentre** du triangle ABC.
e. $z_A + z_B + z_C - 2z_J = (-2-2\mathrm{i}) + (3+3\mathrm{i}) + (2-2\mathrm{i}) - 2\mathrm{i} = 3 - 3\mathrm{i} = z_H$ ✓. En soustrayant z_J des deux côtés : $z_H - z_J = (z_A - z_J) + (z_B - z_J) + (z_C - z_J)$, soit

$$\overrightarrow{JH} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC},$$

relation valable dans tout triangle entre le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre (contrôle : $3 - 4\mathrm{i} = (-2-3\mathrm{i}) + (3+2\mathrm{i}) + (2-3\mathrm{i})$ ✓).

Corrigé — Exercice 20

a. $|a| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$, $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donnent $\theta = \frac{3\pi}{4}$: $a = \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}$. Alors $\frac{1}{a} = \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/4} = \overline{a}$ et $f(a) = a + \overline{a} = 2\,\mathrm{Re}(a) = -\sqrt{2}$.

b. Pour $z \neq 0$, $f(z) = 1 \iff z^2 + 1 = z \iff z^2 - z + 1 = 0$; $\Delta = 1 - 4 = -3$, d'où $z = \frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, c'est-à-dire $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ ou $z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$ (module 1, cosinus $\frac{1}{2}$, sinus $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$).

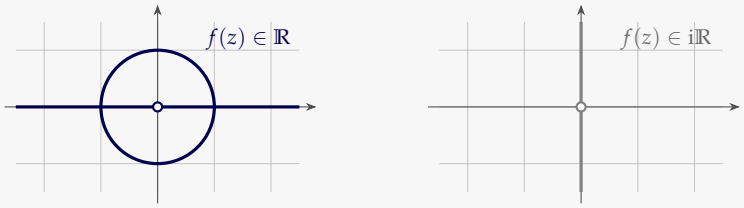
c. Un point du cercle trigonométrique a une affixe de module 1, donc de la forme $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ (θ un argument de z). Alors $\frac{1}{z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ et $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = 2\cos\theta$ (formule d'Euler), qui est réel.

d. $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2+y^2}$, donc

$$f(z) = \left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right) + \mathrm{i}\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right) = x\left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right) + \mathrm{i}\,y\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

e. $f(z) \in \mathbb{R} \iff y\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0 \iff y = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1$: l'ensemble est la réunion de l'**axe des réels privé de** O et du **cercle trigonométrique** (on retrouve **c**).

$f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff x\left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0 \iff x = 0$, car $1 + \frac{1}{x^2+y^2} > 0$: l'ensemble est l'**axe des imaginaires privé de** O.



Corrigé — Exercice 21

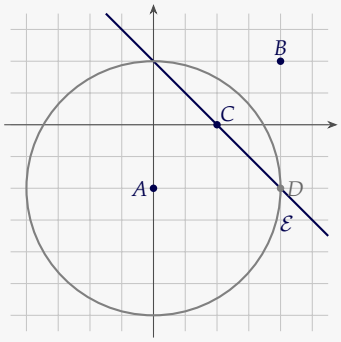
a. $z'_C = \frac{2-4-2\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}} = \frac{-2-2\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}} = -1$; $\quad z'_D = \frac{4-2\mathrm{i}-4-2\mathrm{i}}{4-2\mathrm{i}+2\mathrm{i}} = \frac{-4\mathrm{i}}{4} = -\mathrm{i}$.

b. $|z'| = 1 \iff |z - z_B| = |z - z_A| \iff BM = AM$: $\mathcal{E}$ est la **médiatrice de** $[AB]$. Avec $z = x + \mathrm{i}y$, on obtient $x^2 + (y+2)^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2$, soit $4y + 4 = -8x - 4y + 20$, c'est-à-dire $x + y = 2$. Elle passe par le milieu $(2\,;0)$ de $[AB]$ et par C (cohérent avec $|z'_C| = 1$).

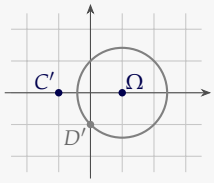
c. $z' - 1 = \frac{z-4-2\mathrm{i}-(z+2\mathrm{i})}{z+2\mathrm{i}} = \frac{-4-4\mathrm{i}}{z+2\mathrm{i}}$, donc $(z'-1)(z+2\mathrm{i}) = -4-4\mathrm{i}$.

d. En passant aux modules : $|z'-1| \times |z+2\mathrm{i}| = |-4-4\mathrm{i}| = 4\sqrt{2}$, soit $\Omega M' \times AM = 4\sqrt{2}$ avec $\Omega(1)$. Si M décrit le cercle de centre A et de rayon r, alors $AM = r$ et $\Omega M' = \frac{4\sqrt{2}}{r}$: M' décrit le **cercle de centre** $\Omega(1)$ **et de rayon** $\frac{4\sqrt{2}}{r}$. Pour $r = 4$, l'image est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{2}$.

Contrôle : D est sur le cercle de centre A et de rayon $|4 - 2\mathrm{i} + 2\mathrm{i}| = 4$, et son image $D'(-\mathrm{i})$ vérifie $\Omega D' = |-\mathrm{i} - 1| = \sqrt{2}$ ✓.



plan des points M



plan des points M'

Corrigé — Exercice 22

a. $z^3-1=(z-1)\left(z^2+z+1\right)$ (théorème de factorisation de z^n-a^n). Donc $z^3=1 \iff z=1$ ou $z^2+z+1=0$. Cette dernière a pour discriminant -3 : $z=\dfrac{-1\pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

$$\mathbb{U}_3=\left\{1\,;\,j=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\,;\,\bar{j}=\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

b. Les trois points sont sur le cercle trigonométrique et se déduisent l'un de l'autre par une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$: ils forment un **triangle équilatéral**.

c. $|j|=1$ et $(\cos\theta\,;\sin\theta)=\left(-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donnent $j=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$.

Comme $j^3=1$ et $2026=3\times 675+1$: $j^{2026}=\left(j^3\right)^{675}\times j=j$.

Comme $1+j+j^2=0$: $1+j=-j^2$, donc $(1+j)^{2026}=\left(-j^2\right)^{2026}=j^{4052}$; et $4052=3\times 1350+2$, donc $(1+j)^{2026}=j^2=\bar{j}=\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

d. $z^3=8 \iff \left(\dfrac{z}{2}\right)^3=1 \iff \dfrac{z}{2}\in\mathbb{U}_3 : \mathcal{S}=\left\{2\,;2j\,;2j^2\right\}=\left\{2\,;-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\,;-1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$.

e. $z^4-1=\left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right)=(z-1)(z+1)(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$: $\mathbb{U}_4=\{1\,;\mathrm{i}\,;-1\,;-\mathrm{i}\}$, les sommets d'un carré.

f. Les sommets de l'octogone sont les images des racines huitièmes $\omega_k=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/8}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/4}$; les huit côtés ont la longueur de $[\omega_0\omega_1]$:

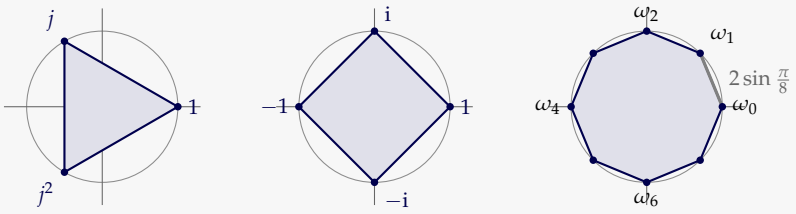
$$|\omega_1-\omega_0|=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}-1\right|=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/8}\right|\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/8}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/8}\right|=1\times\left|2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}\right|=2\sin\frac{\pi}{8},$$

par la formule d'Euler (même calcul que pour le pentagone du cours). Le périmètre vaut $8\times 2\sin\dfrac{\pi}{8}=16\sin\dfrac{\pi}{8}$.

Pour la valeur exacte, on utilise la formule de duplication $\cos 2a=1-2\sin^2 a$ avec $a=\dfrac{\pi}{8}$ (donc $\cos 2a=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$) :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=1-2\sin^2\frac{\pi}{8} \iff \sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{4} \iff \sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad (\text{car } \sin\tfrac{\pi}{8}>0).$$

D'où le périmètre $16\times\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}=8\sqrt{2-\sqrt{2}}\approx 6{,}12$, déjà proche de $2\pi\approx 6{,}28$. ■



Corrigé — Exercice 23

a. Par le binôme, avec $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$:

$$(c + \mathrm{i}s)^3 = c^3 + 3c^2(\mathrm{i}s) + 3c(\mathrm{i}s)^2 + (\mathrm{i}s)^3 = c^3 + 3\mathrm{i}c^2s - 3cs^2 - \mathrm{i}s^3 = \left(c^3 - 3cs^2\right) + \mathrm{i}\left(3c^2s - s^3\right).$$

b. La formule de Moivre donne $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + \mathrm{i}\sin 3\theta$. Par identification des parties réelles et imaginaires, puis avec $s^2 = 1 - c^2$ et $c^2 = 1 - s^2$:

$$\cos 3\theta = c^3 - 3c(1 - c^2) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \qquad \sin 3\theta = 3(1 - s^2)s - s^3 = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

c. Pour $\theta = \dfrac{\pi}{9}$: $3\theta = \dfrac{\pi}{3}$ et $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. La formule donne $4c^3 - 3c = \dfrac{1}{2}$, soit $8c^3 - 6c - 1 = 0$. ■

On montre en arithmétique que cette équation n'a pas de solution rationnelle : $\cos\dfrac{\pi}{9}$ n'est pas « constructible » à la règle et au compas, ce qui explique l'impossibilité de la trisection de l'angle.

Corrigé — Exercice 24

a. Les coefficients de P sont réels, donc $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$ (règles du conjugué). Si $P(\alpha) = 0$, alors $P(\overline{\alpha}) = \overline{0} = 0$.

b. $(\mathrm{i}b)^2 = -b^2$, $(\mathrm{i}b)^3 = -\mathrm{i}b^3$, $(\mathrm{i}b)^4 = b^4$, donc

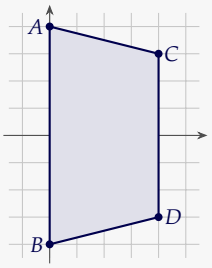
$$P(\mathrm{i}b) = b^4 + 8\mathrm{i}b^3 - 41b^2 - 128\mathrm{i}b + 400 = \left(b^4 - 41b^2 + 400\right) + \mathrm{i}\left(8b^3 - 128b\right).$$

$\mathrm{i}b$ est racine si et seulement si les deux parties sont nulles. Partie imaginaire : $8b\left(b^2 - 16\right) = 0$, soit $b = 0$ ou $b = \pm 4$. Partie réelle : pour $b = 0$ elle vaut $400 \neq 0$; pour $b = \pm 4$ elle vaut $256 - 656 + 400 = 0$ ✓. Les racines imaginaires pures sont donc exactement $4\mathrm{i}$ et $-4\mathrm{i}$.

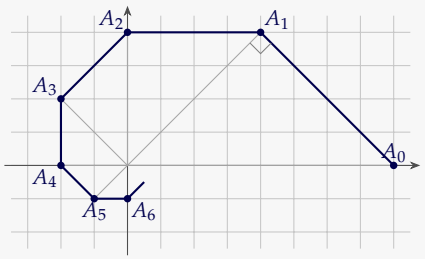
c. On développe : $(z^2 + 16)(az^2 + bz + c) = az^4 + bz^3 + (c + 16a)z^2 + 16bz + 16c$.
Identification avec P : $a = 1$; $b = -8$; $16c = 400$ donc $c = 25$. Contrôle des deux autres coefficients : $c + 16a = 41$ ✓ et $16b = -128$ ✓. Ainsi $P(z) = \left(z^2 + 16\right)\left(z^2 - 8z + 25\right)$.

d. $z^2 - 8z + 25 = 0$: $\Delta = 64 - 100 = -36$, $z = \dfrac{8 \pm 6\mathrm{i}}{2} = 4 \pm 3\mathrm{i}$.
Finalement $\mathcal{S} = \{4\mathrm{i}\,; -4\mathrm{i}\,; 4 + 3\mathrm{i}\,; 4 - 3\mathrm{i}\}$.

e. $A(4\mathrm{i})$, $B(-4\mathrm{i})$, $C(4 + 3\mathrm{i})$, $D(4 - 3\mathrm{i})$. Les droites (AB) (axe des imaginaires) et (CD) (droite d'équation $x = 4$) sont parallèles ; de plus $AC = |z_C - z_A| = |4 - \mathrm{i}| = \sqrt{17}$ et $BD = |z_D - z_B| = |4 + \mathrm{i}| = \sqrt{17}$. Le quadrilatère $ACDB$ est un **trapèze isocèle**, symétrique par rapport à l'axe des réels — ce qui traduit la propriété **a** : les racines vont par paires conjuguées.



Corrigé — Exercice 25



a. $\left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$.

$z_1 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} \times 8 = 4+4\mathrm{i}$; $z_2 = \dfrac{(1+\mathrm{i})(4+4\mathrm{i})}{2} = \dfrac{8\mathrm{i}}{2} = 4\mathrm{i}$;
$z_3 = \dfrac{(1+\mathrm{i})4\mathrm{i}}{2} = -2+2\mathrm{i}$; $z_4 = \dfrac{(1+\mathrm{i})(-2+2\mathrm{i})}{2} = -2$.

b. (z_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ et de premier terme 8, donc $z_n = 8q^n = 8\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/4}$ (formule de Moivre). Comme $z_n \neq 0$, A_n est sur l'axe des réels si et seulement si $\dfrac{n\pi}{4} \equiv 0\ [\pi]$, c'est-à-dire si n est un **multiple de** 4 : $A_0(8)$, $A_4(-2)$, $A_8\left(\frac{1}{2}\right)$, …

c. $r_n = |z_n| = 8\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$: suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \in]0\,;1[$, donc $r_n \to 0$. La distance OA_n tend vers 0 : les points A_n s'enroulent en spirale vers O.

d. $A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = |z_n|\left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{2} - 1\right| = r_n\left|\dfrac{-1+\mathrm{i}}{2}\right| = r_n\dfrac{\sqrt{2}}{2} = r_{n+1}$.

Ainsi $A_{n+1}A_n = OA_{n+1} = r_{n+1}$: le triangle est isocèle en A_{n+1}. De plus $OA_{n+1}^2 + A_{n+1}A_n^2 = 2r_{n+1}^2 = 2 \times \dfrac{r_n^2}{2} = r_n^2 = OA_n^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, il est **rectangle en** A_{n+1}.

e. $L_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A_kA_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1} = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$, somme de n termes d'une suite géométrique de raison $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $r_1 = 4\sqrt{2}$:

$$L_n = 4\sqrt{2} \times \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{4\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}(1-q^n) = \frac{8\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}(1-q^n) = \left(8+8\sqrt{2}\right)\left(1-\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right),$$

car $\dfrac{8\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{8\sqrt{2}\,(2+\sqrt{2})}{4-2} = 8\sqrt{2}+8$. Comme $q^n \to 0$, $L_n \to 8+8\sqrt{2} \approx 19{,}31$: la ligne brisée, pourtant infinie, a une longueur finie.

Corrigé — Exercice 26

a. `3.0 4.0` ; `5.0` ; `(3-4j)` ; `(25+0j)` (car $z\bar{z} = |z|^2 = 25$) ; `(-4+0j)` (car $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$, donc $(1+\mathrm{i})^4 = (2\mathrm{i})^2 = -4$).
b. et **c.**

```
import math
def module(z):
  return math.sqrt(z.real**2 + z.imag**2)
def argument(z):
  # angle du point (x ; y), dans ]-pi ; pi]
  return math.atan2(z.imag, z.real)
def forme_expo(z):
  r, theta = module(z), argument(z)
  print("module :", round(r, 4), " argument :", round(theta, 4), "rad")
forme_expo(1 + math.sqrt(3) * 1j)   # module :  2.0 argument :  1.0472 rad
forme_expo(-2 + 2j)           # module :  2.8284 argument :  2.3562 rad
```

$1{,}0472 \approx \dfrac{\pi}{3}$ et $2{,}8284 \approx 2\sqrt{2}$, $2{,}3562 \approx \dfrac{3\pi}{4}$: on retrouve $1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ et $-2+2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}$.
La fonction `atan2` tient compte des signes de x *et* de y : c'est elle qui place l'argument dans le bon quadrant, exactement comme le couple $(\cos\theta\,;\sin\theta)$ de la méthode 6.6.

Corrigé — Exercice 27

a. et **c.** On distingue les trois cas du théorème 3.2 ; pour $\Delta < 0$, la racine carrée de $-\Delta$ est un réel et l'on multiplie par `1j`.

```
import math
def racines(a, b, c):
  d = b*b - 4*a*c
  if d > 0:
    r = math.sqrt(d)
    z1, z2 = (-b - r) / (2*a), (-b + r) / (2*a)
  elif d == 0:
    z1 = z2 = -b / (2*a)
  else:
    r = math.sqrt(-d)
    z1, z2 = (-b - 1j*r) / (2*a), (-b + 1j*r) / (2*a)
  # controle :  somme -b/a et produit c/a
  assert abs(z1 + z2 - (-b/a)) < 1e-9 and abs(z1*z2 - c/a) < 1e-9
  return z1, z2
print(racines(1, 1, 1))     # ((-0.5-0.866j), (-0.5+0.866j))
print(racines(1, -4, 13))   # ((2-3j), (2+3j))
print(racines(2, 2, 5))     # ((-0.5-1.5j), (-0.5+1.5j))
print(racines(1, -2, 1))    # (1.0, 1.0)
```

b. On retrouve les résultats de l'exercice 6 : $\frac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ (le premier affichage est arrondi : $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$), $2 \pm 3\mathrm{i}$, $-\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\mathrm{i}$, et la racine double 1.
Le test `assert` de la question **c** n'échoue jamais : pour un trinôme, la somme des racines vaut toujours $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit $\dfrac{c}{a}$, y compris lorsqu'elles sont complexes conjuguées ($z+\bar{z} = 2\operatorname{Re} z$ et $z\bar{z} = |z|^2$ sont bien réels).

Corrigé — Exercice 28

a. Si $w = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, alors $w^n = \rho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$ (formule de Moivre). Par unicité de la forme exponentielle, $w^n = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ si et seulement si $\rho^n = r$ et $n\varphi \equiv \theta\ [2\pi]$, c'est-à-dire $\rho = \sqrt[n]{r}$ (l'unique réel positif dont la puissance n-ième vaut r) et $\varphi = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Deux valeurs de k donnent le même nombre si et seulement si elles diffèrent d'un multiple de n (même argument qu'au théorème 9.2) : les n valeurs $k = 0, \dots, n-1$ donnent n solutions distinctes $w_0, \dots, w_{n-1}$, et il n'y en a pas d'autres — le polynôme $w^n - z$, de degré n, a au plus n racines (théorème 4.5). Enfin $w_k = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/n} \times \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n} = w_0\,\omega_k$: les racines n-ièmes de z s'obtiennent en multipliant l'une d'elles par les racines n-ièmes de l'unité.
b. et **c.**

```
import cmath, math
def racines_n(z, n):
  r, theta = cmath.polar(z)     # module et argument de z
  rho = r ** (1 / n)       # racine n-ieme (reelle positive) du module
  return [cmath.rect(rho, (theta + 2*math.pi*k) / n) for k in range(n)]
z = 8j
for w in racines_n(z, 3):
  print(w, abs(w**3 - z) < 1e-9)
# (1.7320508075688774+0.9999999999999999j) True
# (-1.7320508075688774+0.9999999999999999j) True
# (-3.6739403974420594e-16-2j) True
```

Les trois tests valent `True`. Les affichages sont ceux des flottants : $1{,}732\ldots \approx \sqrt{3}$, $0{,}999\ldots \approx 1$ et $-3{,}7 \times 10^{-16} \approx 0$ sont des arrondis de calcul, comme dans le module Python du cours.
d. $8\mathrm{i} = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$: $r = 8$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, donc $\sqrt[3]{8} = 2$ et $\varphi_k = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$. Les solutions sont

$$w_0 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} = \sqrt{3} + \mathrm{i}, \qquad w_1 = 2\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/6} = -\sqrt{3} + \mathrm{i}, \qquad w_2 = 2\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/2} = -2\mathrm{i},$$

ce qui correspond exactement aux trois affichages. Contrôle : $(-2\mathrm{i})^3 = -8\mathrm{i}^3 = 8\mathrm{i}$ ✓, et $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^3 = 8\mathrm{i}$ a été vérifié dans l'application 9 du cours. Les trois images forment un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 2 : chaque solution se déduit de la précédente par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

