Annexes

Formulaire de Terminale spécialité

Objectifs du chapitre — programme officiel (BO 2019)

Ce document contient. Toutes les formules du programme, regroupées par domaine, à conserver sous la main pendant les révisions.

ANNEXES

FORMULAIRE

Toutes les formules exigibles du programme. Les contenus marqués ★ sont des approfondissements non exigibles.

Suites — chapitre 1

$u_n = u_0 + nr$ — arithmétique · $u_n = u_0 q^n$ — géométrique $1 + q + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ pour $q \neq 1$

Récurrence. Initialisation · hypothèse · hérédité · conclusion.

Limite de q^n. $q > 1 \to +\infty$ · $q = 1 \to 1$ · $-1 < q < 1 \to 0$ · $q \leqslant -1$: pas de limite

Inégalité de Bernoulli. $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$ pour $a \geqslant 0$

Limite monotone. Croissante et majorée $\Longrightarrow$ converge. Croissante et non majorée $\Longrightarrow +\infty$.

Comparaison. $u_n \geqslant v_n$ et $v_n \to +\infty \Longrightarrow u_n \to +\infty$ · Gendarmes : $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$, mêmes limites finies $\Longrightarrow u_n \to \ell$

Limites de fonctions — chapitre 2

Quatre formes indéterminées. $\infty - \infty$ · $0 \times \infty$ · $\dfrac{\infty}{\infty}$ · $\dfrac{0}{0}$

En $\pm\infty$, quotient de polynômes : limite du quotient des termes de plus haut degré. **En un point a avec $D(a) = 0$:** si $N(a) \neq 0$, limites infinies à gauche et à droite ; si $N(a) = 0$, factoriser $x - a$.

$\sqrt{x^2} = |x|$ — attention au signe en $-\infty$.

Exponentielle — chapitre 2

$e^{a+b} = e^a e^b$ · $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ · $(e^a)^n = e^{na}$ · $e^x > 0$

$e^A = e^B \iff A = B$ · $e^A < e^B \iff A < B$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ · $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$(e^u)' = u' e^u$ — le signe est celui de u' **Inégalité de tangente.** $e^x \geqslant 1 + x$, égalité en $x = 0$

Croissances comparées. $\dfrac{e^x}{x^n} \to +\infty$ en $+\infty$ · $x^n e^x \to 0$ en $-\infty$

Continuité — chapitre 3

TVI. f continue sur $[a\,;\,b]$, k entre $f(a)$ et $f(b) \Longrightarrow$ au moins une solution à $f(x) = k$.

Corollaire. + f **strictement monotone** $\Longrightarrow$ solution **unique**. **Dichotomie.** Amplitude après n étapes : $\dfrac{b-a}{2^n}$. **Point fixe.** $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente et f continue $\Longrightarrow \ell = f(\ell)$.

Dérivation et convexité — chapitre 4

f	k	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$
f'	0	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$(uv)' = u'v + uv' \cdot (\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \cdot (v \circ u)' = u' \times v'(u)$$

$$(u^n)' = nu'u^{n-1} \cdot (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \cdot (\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$$

Tangente en a **:** $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Convexité. $f'' \geqslant 0 \iff f'$ croissante $\iff$ courbe **au-dessus** des tangentes. **Point d'inflexion.** f'' s'annule **en changeant de signe**.

Logarithme — chapitre 5

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \cdot \ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b \cdot \ln(a^n) = n \ln a$$

$$\ln(e^x) = x \cdot e^{\ln x} = x \cdot \ln 1 = 0 \cdot \ln e = 1$$

$$\ln A = \ln B \iff A = B \text{ (avec } A > 0, B > 0) \cdot \ln A < \ln B \iff A < B$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \cdot \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \cdot (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Inégalité de tangente. $\ln x \leqslant x - 1$, égalité en $x = 1$ **Croissances comparées.** $\dfrac{\ln x}{x^n} \to 0$ en $+\infty$ $\cdot$ $x^n \ln x \to 0$ en $0+$ **Seuil.** $q^n < \varepsilon \iff n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln q}$ pour $0 < q < 1$ — ■ **le sens s'inverse**

Trigonométrie — chapitre 6

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \cdot -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \cdot -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

$$\cos(-x) = \cos x \cdot \sin(-x) = -\sin x \cdot \text{période } 2\pi$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x \cdot \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

$(\sin x)' = \cos x \cdot (\cos x)' = -\sin x \cdot (\sin u)' = u' \cos u \cdot (\cos u)' = -u' \sin u$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\cos x = a \iff x = \pm\alpha + 2k\pi \cdot \sin x = a \iff x = \beta + 2k\pi$ ou $\pi - \beta + 2k\pi$

Primitives et équations différentielles — chapitre 7

f	x^n	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	e^x	$\cos x$	$\sin x$
F	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln x$ (sur $]0\,;+\infty[$)	$-\frac{1}{x}$	$2\sqrt{x}$	e^x	$\sin x$	$-\cos x$

f	$u'u^n$	$\frac{u'}{u}$	$u'e^u$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$\frac{u'}{u^2}$	$u'\cos u$	$u'\sin u$
F	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$\ln u$	e^u	$2\sqrt{u}$	$-\frac{1}{u}$	$\sin u$	$-\cos u$

Équations différentielles. $y' = ay \Longrightarrow y = Ce^{ax}$

$y' = ay + b \Longrightarrow y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ — la constante $-\frac{b}{a}$ est l'**état d'équilibre** $y' = ay + f$ (g solution particulière fournie) : $y = g(x) + C\,e^{ax}$

Calcul intégral — chapitre 8

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \cdot \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Chasles. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

Linéarité. $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Positivité et croissance — exigent $a \leqslant b$ **Inégalité de la moyenne.** $m \leqslant f \leqslant M \Longrightarrow m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne. $\mu = (\frac{1}{b-a}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Intégration par parties. $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$

Aire entre deux courbes. $\int_a^b (dessus - dessous)$, après étude du signe ■ $\int fg \neq (\int f)(\int g)$ — aucune formule pour un produit

Géométrie dans l'espace — chapitres 9 et 10

Coordonnées. $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;\, y_B - y_A\,;\, z_B - z_A)$ · milieu : moyennes des coordonnées **Colinéarité.** $\vec{v} = k\vec{u}$ — **trois** égalités à vérifier **Droite.** $M = A + t\vec{u}$ · **Plan.** $M = A + t\vec{u} + s\vec{v}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires

Produit scalaire (repère **orthonormé**) : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ · $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

Équation cartésienne. $ax + by + cz + d = 0$, de vecteur normal $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ **Distance point-plan.** $d(M\,;\,P) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Positions relatives. Plans parallèles $\iff$ normales colinéaires · droite $\perp$ plan $\iff$ directeur colinéaire à la normale · droite $\parallel$ plan $\iff$ directeur orthogonal à la normale

Combinatoire — chapitre 11

$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ · $0! = 1$

k**-uplets** d'un ensemble à n éléments : n^k · **Arrangements** (k éléments **distincts et ordonnés**) : $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

Combinaisons (k éléments, **sans ordre**) : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Symétrie. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ · **Relation de Pascal.** $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Somme. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ — nombre de parties d'un ensemble à n éléments

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Probabilités — chapitres 12 à 14

$P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ · indépendance : $P(A\cap B) = P(A)P(B)$

Probabilités totales. $P(B) = \sum P(A_i)P_{A_i}(B)$

Loi binomiale $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,p)$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$E(X) = np$ · $V(X) = np(1-p)$ · $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

$P(X \geqslant k) = 1 - P(X \leqslant k-1)$ — ■ **le rang se décale de 1**

Transformation affine. $E(aX+b) = aE(X) + b$ · $V(aX+b) = a^2V(X)$ · $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$

Somme. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ **toujours** · $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ **si indépendantes**

Échantillon de taille n, d'espérance μ et d'écart-type σ :

	Espérance	Variance	Écart-type
S_n	$n\mu$	$n\sigma^2$	$\sigma\sqrt{n}$
M_n	μ	$\dfrac{\sigma^2}{n}$	$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Markov. $X \geqslant 0$ et $a > 0 \Longrightarrow P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}$

Bienaymé-Tchebychev. $P(|X - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V(X)}{\delta^2}$

Concentration. $P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\delta^2}$

Loi des grands nombres. $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) = 0$

Cas de la fréquence. $P(|F_n - p| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{1}{4n\delta^2}$, car $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$

Taille d'échantillon. $n \geqslant \dfrac{1}{4\alpha\delta^2}$ suffit pour une marge δ au risque α

★ Approfondissements non exigibles

$(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ — binôme de Newton, ch. 11 §5.3

Anagrammes avec répétitions : $n!/(n_1!\dots n_p!)$ — ch. 11 §5.1 Arrangements circulaires : $(n-1)!$ — ch. 11 §5.2 Asymptote oblique : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$ — ch. 2, EX 61 Variation de la constante — ch. 7, EX 249