Chapitre 1. Cours

Suites numériques, limites et récurrence

Objectifs du chapitre — programme officiel (BO 2019)

Ce document contient. Cours complet : définitions, propriétés et démonstrations exigibles, fiches méthodes guidées, exemples résolus et synthèse du chapitre.

Extrait du manuel *Math Convergence — Terminale, spécialité mathématiques*
A. Choukoukou · session 2027 · reproduit avec l'autorisation de l'auteur.

CHAPITRE

1

SUITES NUMÉRIQUES, LIMITES ET RÉCURRENCE

Une suite, c'est une infinité de nombres. Ce chapitre donne les deux seuls outils permettant d'en dire quelque chose de sûr : un raisonnement qui atteint tous les rangs d'un coup, et un vocabulaire pour décrire ce qui se passe « au bout ».

Objectifs. Démontrer une propriété par récurrence · déterminer la limite d'une suite · lever une forme indéterminée · utiliser les théorèmes de comparaison · reconnaître et exploiter une suite géométrique · appliquer le théorème de la limite monotone · déterminer un seuil par algorithme.

Compétences travaillées. Raisonner (dominante) · Calculer · Chercher · Communiquer

Prérequis. Acquis de Première : quantificateurs, négation, implication, disjonction de cas · suites arithmétiques et géométriques de Première · sens de variation · inéquations.

Diagnostic express.

1. Soit (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 3. Exprimer u_n.
2. Soit (v_n) géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $0,5$. Calculer v_3.
3. Calculer $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$.
4. Résoudre $0,8^n < 0,5$ — on donnera une valeur approchée du seuil.
5. Une suite croissante peut-elle être majorée ?

Corrigé en fin de chapitre.

---

1. Quantificateurs et négation

Les énoncés sur les suites s'écrivent avec deux symboles, acquis en Première. Les manipuler correctement conditionne toute la rédaction du chapitre.

Les deux quantificateurs.

$\forall$ **« pour tout », « quel que soit »** $\qquad$ $\exists$ **« il existe (au moins un) »**

Exemple. « (u_n) est majorée » s'écrit $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.

On lit : *il existe un réel M tel que, pour tout entier n, le terme u_n ne dépasse pas M.*

■ **L'ordre compte.** $\exists M, \forall n, u_n \leqslant M$ signifie qu'**un seul** M convient pour tous les rangs : la suite est majorée.
$\forall n, \exists M, u_n \leqslant M$ est toujours vrai et ne dit rien : il suffit de prendre $M = u_n$. Intervertir les quantificateurs change complètement le sens.

Règles de négation. Nier une proposition quantifiée revient à **échanger** les quantificateurs et à nier la conclusion :

$$\text{non}\big(\forall x,\ P(x)\big) \ \equiv\ \exists x,\ \text{non}\ P(x) \qquad \text{non}\big(\exists x,\ P(x)\big) \ \equiv\ \forall x,\ \text{non}\ P(x)$$

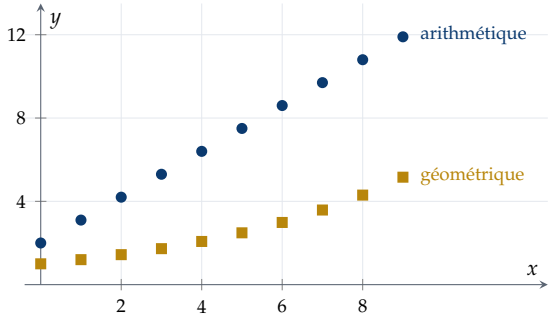
Trois négations à savoir écrire.

Proposition	Sa négation
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$	$\exists n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 0$
$\exists M,\ \forall n,\ u_n \leqslant M$ ***(la suite est majorée)***	$\forall M,\ \exists n,\ u_n > M$ ***(la suite n'est pas majorée)***
$\forall n,\ u_{n+1} \geqslant u_n$ ***(la suite est croissante)***	$\exists n,\ u_{n+1} < u_n$

➤ **Bon réflexe.** La négation d'une inégalité large est une inégalité **stricte**, et réciproquement. La négation de $u_n \leqslant M$ est $u_n > M$, jamais $u_n \geqslant M$.

➤ **À quoi cela sert.** Démontrer qu'une suite croissante **non majorée** tend vers $+\infty$ commence par écrire la négation de « majorée » : pour tout A, il existe un rang N tel que $u_N > A$. C'est cette proposition qui fournit le rang cherché.

2. Rappels de Première



1.1 — Suite arithmétique et suite géométrique

Suite arithmétique de raison r : $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_n = u_0 + nr$.
Suite géométrique de raison q : $u_{n+1} = q\,u_n$ et $u_n = u_0\,q^n$.

Sommes (rappels de Première).

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ $\qquad$ $1+q+\cdots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ **pour** $q\neq 1$

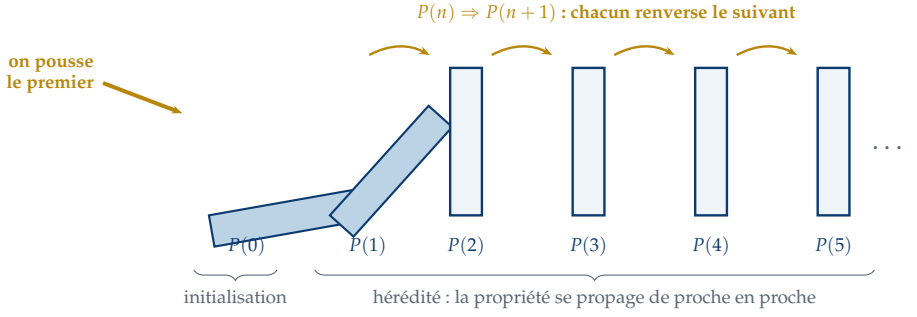
Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique : $u_p+\cdots+u_n=(n-p+1)\times\dfrac{u_p+u_n}{2}$

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique ($q\neq 1$) : $u_p+\cdots+u_n=u_p\times\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

➤ **Bon réflexe.** Pour reconnaître la nature d'une suite, calculez $u_{n+1}-u_n$ (arithmétique si constant) puis $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (géométrique si constant). Deux lignes suffisent à trancher.

3. Le raisonnement par récurrence

Une propriété $P(n)$ porte sur une **infinité** d'entiers : impossible de la vérifier rang par rang. Le raisonnement par récurrence lève cette difficulté en deux gestes : on vérifie $P(0)$ (**initialisation**), puis on démontre que si la propriété est vraie à un rang n quelconque, elle l'est encore au rang $n+1$ (**hérédité**). Comme une chaîne de dominos : on pousse le premier, chaque domino renverse le suivant — et tous finissent par tomber. Ce raisonnement est **indispensable** dès que la suite est définie par récurrence, c'est-à-dire lorsque u_{n+1} se calcule à partir de u_n sans formule explicite en n.



1.2 — Le principe de récurrence : la chute des dominos

Lire la figure. Chaque domino représente une proposition $P(n)$: debout, elle est encore à démontrer ; tombé, elle est acquise.

L'**initialisation** consiste à pousser le premier domino, c'est-à-dire à vérifier $P(0)$ par le calcul. L'**hérédité** garantit que les dominos sont assez proches les uns des autres pour que chacun entraîne son voisin : c'est l'implication $P(n)\Rightarrow P(n+1)$.

Les deux sont indispensables, et pour des raisons différentes. Sans initialisation, la rangée est bien alignée mais personne ne pousse : rien ne tombe. Sans hérédité, on pousse le premier mais les suivants sont trop éloignés : la chute s'arrête au premier.

Théorème 1.1 (principe de récurrence). Soit $P(n)$ une propriété définie pour $n \geqslant n_0$. Si
- $P(n_0)$ est vraie **(initialisation)**,
- pour tout $n \geqslant n_0$, $P(n)$ vraie entraîne $P(n+1)$ vraie **(hérédité)**,

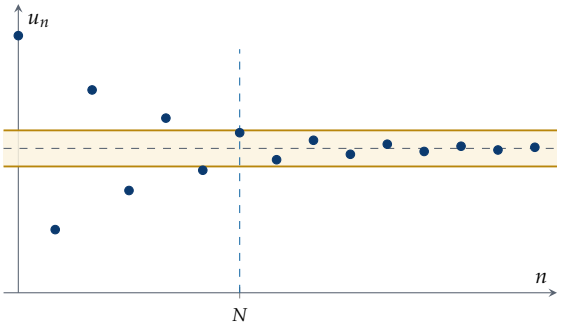
alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Rédaction attendue.
1. Énoncer clairement $P(n)$.
2. Initialisation : vérifier $P(n_0)$ par le calcul.
3. Hérédité : supposer $P(n)$ vraie pour un n **fixé**, puis démontrer $P(n+1)$.
4. Conclusion : invoquer le principe de récurrence.

■ **Erreur à éviter.** Écrire « supposons que $P(n)$ soit vraie pour tout n » : cela revient à supposer ce que l'on veut démontrer. La formule correcte est « soit n fixé tel que $P(n)$ soit vraie ».

➤ **Astuce.** L'initialisation est un point de barème à elle seule, et se traite en une ligne. Ne la sautez jamais, même quand elle est évidente.

4. Limite d'une suite

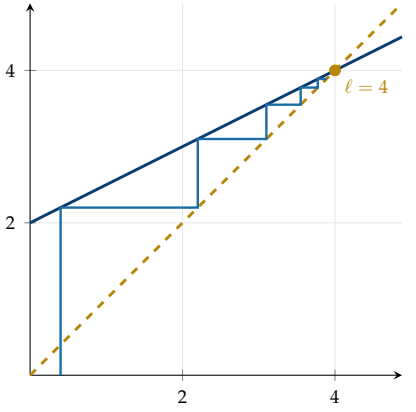


1.3 — Convergence vers ℓ : à partir du rang N, tous les termes restent dans la bande $]\ell-\varepsilon\,;\,\ell+\varepsilon[$

Définition 1.2. (u_n) **converge** vers ℓ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes à partir d'un certain rang. Sinon elle **diverge** — vers $\pm\infty$, ou sans limite.

■ **Erreur à éviter.** « Diverger » ne signifie pas « tendre vers l'infini ». La suite $u_n = (-1)^n$ diverge sans avoir de limite : elle oscille entre -1 et 1.

5. Opérations sur les limites



1.4 — Suite $u_{n+1} = 0.5\,u_n + 2$: convergence vers le point fixe

Les limites d'une somme, d'un produit ou d'un quotient s'obtiennent par les tableaux suivants, où ℓ et ℓ' désignent des réels.

Somme.

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Produit.

$\lim u_n$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\pm\infty$	0
$\lim v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim(u_n \times v_n)$	$\ell\,\ell'$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	$\pm\infty$	**F.I.**

Pour les cas infinis, le signe se détermine par la règle des signes.

Quotient.

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	**F.I.**	**F.I.**

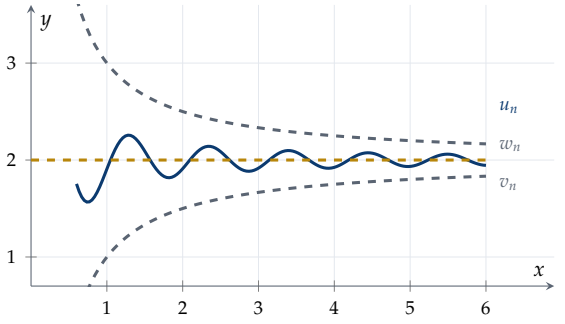
Le cas $\ell \neq 0$ divisé par 0 donne $\pm\infty$, le signe dépendant de celui du dénominateur au voisinage considéré.

■ **Les quatre formes indéterminées** sont exactement les cases marquées **F.I.** :

$$\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}$$

Aucune n'a de valeur par défaut : il faut transformer l'écriture avant de conclure.

6. Théorèmes de comparaison



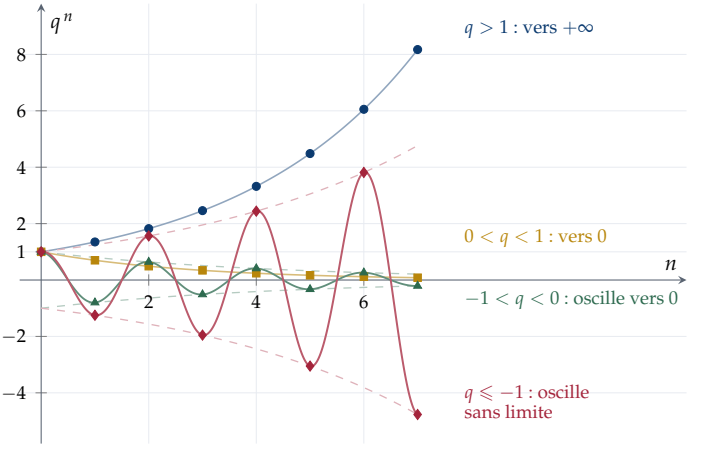
1.5 — Le théorème des gendarmes

Théorème 1.3 (comparaison). Si $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $v_n \to +\infty$, alors $u_n \to +\infty$.

Théorème 1.4 (gendarmes). Si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang et si (v_n) et (w_n) convergent vers la **même** limite ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.

➤ **Bon réflexe.** Une seule minoration suffit pour $+\infty$: c'est le théorème de **comparaison**. Deux bornes de même limite finie sont exigées pour les **gendarmes**. Citer le mauvais théorème coûte le point de justification.

7. Limite d'une suite géométrique



1.6 — Comportement de q^n selon q : nuages de points et allures

Théorème 1.5. Pour q réel :

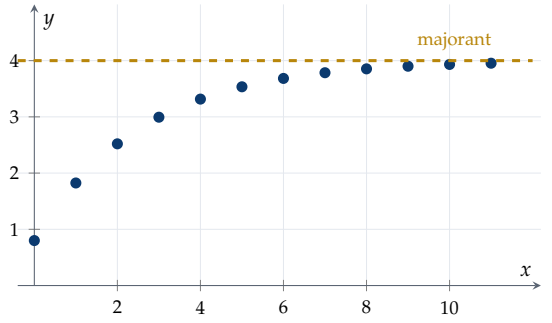
$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ \text{pas de limite} & \text{si } q \leqslant -1 \end{cases}$$

Théorème 1.6 (inégalité de Bernoulli). Pour tout réel $a \geqslant 0$ et tout entier n : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$**.**

C'est elle qui démontre le cas $q > 1$, par comparaison avec une suite arithmétique.

➤ **Astuce.** Retenez le seuil $|q| < 1$: la suite s'écrase vers 0. C'est ce qui rend convergentes les suites arithmético-géométriques dont la raison est inférieure à 1 en valeur absolue.

8. Théorème de la limite monotone



1.7 — Croissante et majorée : la convergence est forcée

Théorème 1.7. Toute suite **croissante et majorée** converge. Toute suite **décroissante et minorée** converge.

Théorème 1.8. Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

■ **Erreur à éviter.** Le théorème donne l'**existence** de la limite, pas sa valeur. Il ne dit pas non plus que la limite est le majorant : une suite croissante majorée par 10 peut très bien converger vers 3.

MÉTHODES

Méthode 1 — Démontrer par récurrence

1. Énoncer $P(n)$ explicitement, avec le rang de départ.
2. Initialiser : vérifier $P(n_0)$ par le calcul.
3. Supposer $P(n)$ vraie pour un n **fixé**, écrire ce que cela signifie.
4. Partir de cette hypothèse et aboutir à $P(n+1)$.
5. Conclure par le principe de récurrence.

➤ **Astuce.** Écrivez d'abord ce que vous **voulez** obtenir — l'expression de $P(n+1)$ — puis partez de l'hypothèse et rejoignez-la. Cela évite de tourner en rond.

Méthode 2 — Lever une forme indéterminée

1. Identifier la forme indéterminée en calculant séparément les limites des morceaux.
2. Transformer l'**écriture** : factoriser par le terme dominant, réduire au même dénominateur, ou multiplier par la quantité conjuguée.
3. Chaque transformation est une **égalité valable pour tout** n : le symbole lim se reporte donc d'une ligne à l'autre.
4. Conclure par les opérations sur les limites, une fois l'indétermination levée.

■ **Erreur de rédaction.** Écrire une suite d'expressions sans le symbole lim devant chacune, puis conclure. Tant que l'indétermination n'est pas levée, c'est la **limite** que l'on transforme, pas un nombre : le symbole doit figurer à chaque étape.

Les quatre formes, une par une.

Forme $\infty - \infty$

Soit $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$. Chaque terme tend vers $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) && \text{forme } \infty - \infty \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n} + n} && \text{quantité conjuguée} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+n) - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n} && (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)} && \text{on factorise par } n \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} && \text{simplification} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Forme $0 \times \infty$

Soit $u_n = \dfrac{1}{n}(3n+2)$. Le premier facteur tend vers 0, le second vers $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(3n+2) && \text{forme } 0 \times \infty \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+2}{n} && \text{on écrit le produit comme un quotient} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right) && \text{on distribue} \\
&= 3 + 0 = 3
\end{aligned}$$

Forme $\dfrac{\infty}{\infty}$

Soit $u_n = \dfrac{3n^2+2n-1}{n^2+5}$. Numérateur et dénominateur tendent vers $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+2n-1}{n^2+5} && \text{forme } \frac{\infty}{\infty} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)} && \text{terme dominant en facteur} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{5}{n^2}} && \text{simplification par } n^2 \\
&= \frac{3+0-0}{1+0} = 3
\end{aligned}$$

Forme $\dfrac{0}{0}$

Soit $u_n = \dfrac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n}}$. Numérateur et dénominateur tendent vers 0.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n}} \qquad \text{forme } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n-1}{n^2}}{\frac{3}{n}} \qquad \text{numérateur au même dénominateur}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n^2} \times \frac{n}{3} \qquad \text{diviser, c'est multiplier par l'inverse}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{3n} \qquad \text{simplification par } n$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{3n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{3} = \frac{1}{3}$$

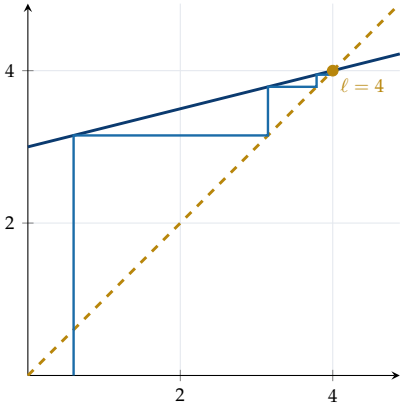
➤ **Ce qu'il faut retenir.** Les quatre traitements sont trois gestes : **factoriser** par le terme dominant, **réduire** au même dénominateur, **multiplier** par la quantité conjuguée. Le troisième ne sert qu'aux différences de racines.

Méthode 3 — Utiliser un théorème de comparaison

1. Repérer le terme dont on ne sait rien — souvent $(-1)^n$, $\sin n$ ou $\cos n$.
2. L'encadrer : $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.
3. Transformer l'encadrement jusqu'à faire apparaître u_n au centre.
4. Choisir le bon théorème : comparaison pour $\pm\infty$, gendarmes pour une limite finie.

■ **Erreur à éviter.** Multiplier un encadrement par un facteur négatif sans inverser les inégalités.

Méthode 4 — Étudier une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$



1.8 — Suite $u_{n+1} = 0.25\,u_n + 3$: convergence vers le point fixe

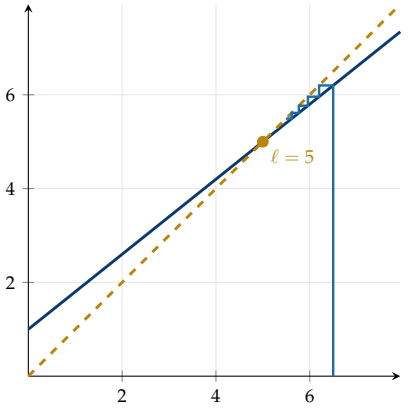
1. **Encadrement** par récurrence : montrer que (u_n) reste dans un intervalle stable.
2. **Monotonie** : étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$, souvent par récurrence également.
3. **Convergence** : appliquer le théorème 1.7.
4. **Valeur de la limite** : si f est « bien régulière », la limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$. Résoudre ...

1.9 — Marche à suivre - Étudier une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Conjecturer encadrement et monotonie sur les premiers termes.
2. Démontrer l'encadrement **par récurrence**.
3. Démontrer la monotonie, par récurrence ou par le signe de $u_{n+1} - u_n$.
4. Conclure à la convergence par le théorème de la limite monotone.
5. Déterminer la limite en résolvant $f(\ell) = \ell$, et **choisir** la racine compatible avec l'encadrement.

■ **Erreur à éviter.** Résoudre $f(\ell) = \ell$ avant d'avoir prouvé la convergence. Cette équation donne les candidats, jamais l'existence de la limite.

Méthode 5 — Déterminer un seuil



1.10 — Suite $u_{n+1} = 0.8\,u_n + 1$: convergence vers le point fixe

1. Écrire l'inéquation sous la forme $q^n > s$ ou $q^n < s$.
2. Appliquer le logarithme aux deux membres, strictement positifs *(logarithme : voir chapitre 5)*.
3. Descendre l'exposant, puis diviser par $\ln q$ en **changeant le sens** si $0 < q < 1$.
4. Conclure par le plus petit entier convenable, et vérifier sur n et $n - 1$.

➤ **Bon réflexe.** L'algorithme de seuil et le calcul par logarithme doivent donner le même entier. Quand les deux sont demandés, c'est une vérification gratuite.

Méthode 6 — Étudier une suite arithmético-géométrique

Quand. La suite vérifie $u_{n+1} = a\,u_n + b$ avec $a \neq 1$. Elle n'est ni arithmétique ni géométrique, et l'énoncé introduit une suite auxiliaire.

1. Déterminer le **point fixe** ℓ en résolvant $\ell = a\ell + b$.
2. Poser $v_n = u_n - \ell$ — c'est ce que l'énoncé fait dire.
3. Démontrer que (v_n) est géométrique de raison a.
4. En déduire $v_n = v_0\,a^n$, puis $u_n = v_0\,a^n + \ell$.
5. Conclure sur la limite selon la position de $|a|$ par rapport à 1.

➤ **Astuce.** La constante à retrancher est toujours le point fixe. Si l'énoncé propose $v_n = u_n - 3$, c'est que 3 vérifie $3 = 3a + b$: vous pouvez le contrôler en une ligne avant de vous lancer.

ERREURS FRÉQUENTES ET BONS RÉFLEXES

■ Erreur	✓ Bon réflexe
Omettre l'initialisation	Sans premier domino, rien ne tombe
Ne pas signaler l'usage de l'hypothèse de récurrence	Le correcteur doit pouvoir pointer la ligne
Écrire $\lim_{n\to+\infty} u_n = \infty$ sans signe	Préciser $+\infty$ ou $-\infty$
Croire qu'une forme indéterminée signifie « pas de limite »	Elle signifie « réécrire l'expression »
Conclure $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ pour $q = -1{,}5$	Pour $q \leqslant -1$, la suite n'a **pas** de limite
Confondre majorant et limite	Une suite majorée par 10 peut converger vers 1
Résoudre $\ell = f(\ell)$ sans prouver la convergence	Étape 4 de la méthode 4, jamais seule
Croire qu'une suite croissante tend toujours vers $+\infty$	Seulement si elle n'est **pas majorée** — théorème 1.8

MODULE PYTHON — SEUIL, SOMME ET CONVERGENCE NUMÉRIQUE

```
# Seuil, somme et convergence numerique

def seuil(u0, q, cible):
    # plus petit n tel que u0 * q**n < cible, avec 0 < q < 1
    u = u0
    n = 0
    while u >= cible:
        u = u * q
        n = n + 1
    return n

def somme_geometrique(q, n):
    # somme des termes q**0 + q**1 + ... + q**n
    s = 0
    t = 1
    for k in range(n + 1):
        s = s + t
        t = t * q
    return s

def suite_recurrente(u0, n):
    # affiche les n premiers termes de u(k+1) = (u(k) + 2/u(k)) / 2
```

```
    u = u0
    for k in range(n):
        print("u_" + str(k), "=", round(u, 9))
        u = (u + 2 / u) / 2

print("seuil de 1000 * 0.9**n < 1 :", seuil(1000, 0.9, 1))
print("controle : u_65 =", round(1000 * 0.9 ** 65, 4))
print("controle : u_66 =", round(1000 * 0.9 ** 66, 4))
s = somme_geometrique(0.5, 30)
print("somme des q**k, q = 0.5 et n = 30 :", round(s, 9))
print()
suite_recurrente(1, 5)
```

Trace d'exécution

```
seuil de 1000 * 0.9**n < 1 : 66
controle : u_65 = 1.0611
controle : u_66 = 0.955
somme des q**k, q = 0.5 et n = 30 : 1.999999999

u_0 = 1
u_1 = 1.5
u_2 = 1.416666667
u_3 = 1.414215686
u_4 = 1.414213562
```

Interprétation mathématique. La fonction *seuil* renvoie 66, et les deux lignes de vérification établissent la **minimalité** : le rang 65 donne encore $1,0611 \geqslant 1$, le rang 66 donne $0,955 < 1$. C'est exactement la double justification exigée par la méthode 5.

La somme géométrique approche 2 sans l'atteindre, conformément à $\sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{2})^k = 2 - (\frac{1}{2})^n$.

La troisième trace montre la suite de l'exercice 33 : quatre itérations suffisent pour obtenir $\sqrt{2}$ avec neuf décimales exactes. La convergence numérique **suggère** la limite ; elle ne la démontre pas. C'est le rôle du théorème 1.7.

SYNTHÈSE

Les trois réflexes du chapitre

1. Dans une hérédité, on part de l'hypothèse et on le dit.
2. Une forme indéterminée se réécrit, elle ne se contemple pas.
3. Avant de résoudre $\ell = f(\ell)$, prouver que la limite existe.