Chapitre 2. Cours

Limites de fonctions

Objectifs du chapitre — programme officiel (BO 2019)

Ce document contient. Cours complet : définitions, propriétés et démonstrations exigibles, fiches méthodes guidées, exemples résolus et synthèse du chapitre.

Extrait du manuel *Math Convergence — Terminale, spécialité mathématiques*
A. Choukoukou · session 2027 · reproduit avec l'autorisation de l'auteur.

CHAPITRE

2

LIMITES DE FONCTIONS

*Presque tout ce que vous avez appris sur les limites de suites se transporte aux fonctions. Ce chapitre vous fait gagner ce transfert, puis ajoute la seule chose que les suites ne pouvaient pas offrir : la limite **en un point**.*

Objectifs. Déterminer une limite en $\pm\infty$ et en un réel · reconnaître et lever les quatre formes indéterminées · interpréter graphiquement par une asymptote · utiliser la limite d'une composée · appliquer les théorèmes de comparaison.

Compétences travaillées. Calculer (dominante) · Représenter · Raisonner

Prérequis. Chapitre 1 : limites, opérations, formes indéterminées, théorèmes de comparaison · fonctions de référence de Première · factorisation, expression conjuguée.

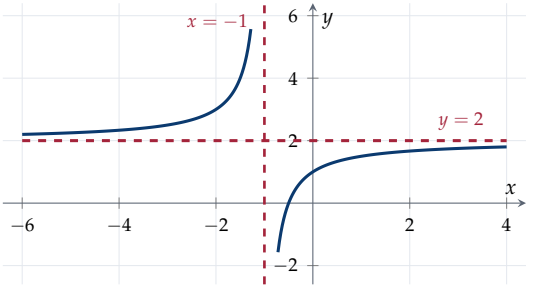
Diagnostic express.

1. Factoriser $x^2 - 4$.
2. Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}$?
3. Donner le signe de $x - 3$ selon les valeurs de x.
4. Simplifier $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$.
5. Une fonction peut-elle prendre des valeurs arbitrairement grandes près d'un point où elle n'est pas définie ?

Corrigé en fin de chapitre.

COURS

1. Limite en $+\infty$ et en $-\infty$



2.1 — Asymptote horizontale et asymptote verticale : $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

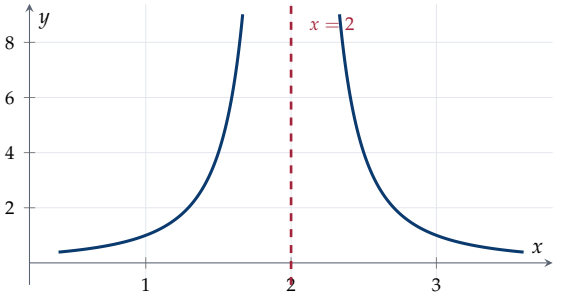
Définition 2.1. f admet pour limite ℓ en $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ lorsque tout intervalle $]A\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

Asymptote horizontale. Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$, la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$.

■ **Erreur à éviter.** Une fonction peut n'avoir **aucune** limite en $+\infty$: c'est le cas de $\sin x$, qui oscille sans se stabiliser. « Ne pas avoir de limite » n'est pas « avoir une limite infinie ».

2. Limite en un réel a



2.2 — Limites infinies en un point : $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ explose des deux côtés de 2

Définition 2.2. f tend vers $+\infty$ en a lorsque $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut dès que x est assez proche de a.

Asymptote verticale. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

➤ **Bon réflexe.** En un point qui annule le dénominateur, calculez **séparément** les limites à gauche et à droite : elles sont souvent opposées. Écrire une seule limite infinie sans préciser le côté est incomplet.

3. Limites des fonctions de référence

	en $+\infty$	**en** 0^+
x^n $(n \geqslant 1)$	$+\infty$	0
$\sqrt{x}$	$+\infty$	0
$\dfrac{1}{x}$	0	$+\infty$
e^x	$+\infty$	—
$\ln x$ **(voir chapitre 5)**	$+\infty$	$-\infty$

4. Opérations sur les limites

$\infty - \infty$ $\quad$ $0 \times \infty$ $\quad$ $\dfrac{\infty}{\infty}$ $\quad$ $\dfrac{0}{0}$

aucune conclusion immédiate : factoriser, simplifier ou comparer

2.3 — Les quatre formes indéterminées

➤ Les tableaux d'opérations (somme, produit, quotient) sont **identiques** à ceux du chapitre 1, la variable devenant x ; ils valent en $+\infty$, en $-\infty$ ou en un réel a. Seul le tableau des formes indéterminées est rappelé ci-dessous.

■ **Les quatre formes indéterminées** sont exactement les cases marquées **F.I.** :

$$\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}$$

Aucune n'a de valeur par défaut : il faut transformer l'écriture avant de conclure.

5. Limite d'une fonction composée

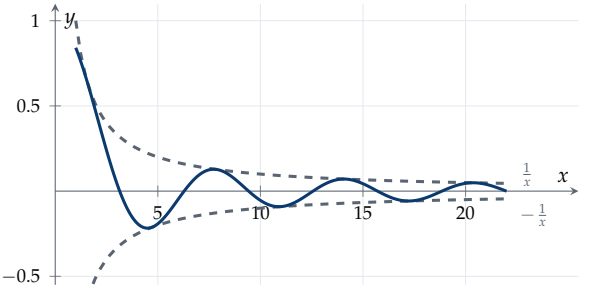
Théorème 2.3. Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} g(X) = \ell$, alors

$$\lim_{x\to a} g\big(u(x)\big) = \ell$$

Exemple d'application. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2}$: on pose $X = -x^2 \to -\infty$, et $e^X \to 0$. Donc la limite vaut 0.

➤ **Rédaction attendue.** Posez explicitement le changement de variable et donnez les **deux** limites successives. Enchaîner mentalement fait perdre le point de justification.

6. Théorèmes de comparaison



2.4 — Gendarmes appliqué à une fonction bornée : $\frac{\sin x}{x}$, coincée entre $\pm\frac{1}{x}$, tend vers 0

Théorème 2.4 (comparaison). Si $f(x) \geqslant g(x)$ au voisinage de $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Théorème 2.5 (gendarmes). Si $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ au voisinage de $+\infty$ et si g et h ont la **même** limite finie ℓ, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

➤ **Bon réflexe.** Dès qu'apparaît sin ou cos avec un argument tendant vers l'infini, la seule voie est l'encadrement. Partez toujours de $-1 \leqslant \sin(\dots) \leqslant 1$.

7. La fonction exponentielle, fonction de référence

Acquise en Première, la fonction exponentielle sert désormais d'outil dans tout le programme. On en rappelle ici l'essentiel, et l'on établit les limites qui seront utilisées aux chapitres 3 et 4.

Définition 2.6 (rappel). La fonction **exponentielle**, notée exp ou $x \mapsto e^x$, est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$f' = f \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1.$$

Propriétés algébriques. Pour tous réels a et b et tout entier n :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \qquad (e^a)^n = e^{na}$$

Signe et variations. $e^x > 0$ pour tout réel x, et exp **est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

Théorème 2.7 (inégalité fondamentale). Pour tout réel x : $\quad e^x > x$.

Démonstration. Posons $g(x) = e^x - x$ sur $\mathbb{R}$. Alors $g'(x) = e^x - 1$, qui est négative sur $]-\infty\,;\,0[$ et positive sur $]0\,;\,+\infty[$, puisque exp est croissante et vaut 1 en 0.

La fonction g admet donc un minimum en 0, égal à $g(0) = 1 - 0 = 1 > 0$. Ainsi $g(x) > 0$ pour tout réel x. ■

Théorème 2.8 (limites aux bornes).

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Démonstration. D'après le théorème 2.7, $e^x > x$ pour tout réel x. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, le théorème de comparaison donne $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Pour la seconde limite, on pose $X = -x$. Quand $x \to -\infty$, $X \to +\infty$, et

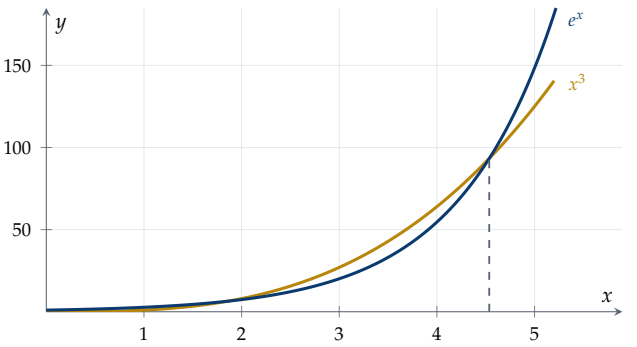
$$e^x = e^{-X} = \frac{1}{e^X}$$

Le dénominateur tendant vers $+\infty$, le quotient tend vers 0. ■

Conséquence graphique. L'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe de exp **en $-\infty$, et la courbe est toujours au-dessus, puisque $e^x > 0$.**

➤ **Bon réflexe.** Les deux limites ne sont pas symétriques : à droite l'exponentielle explose, à gauche elle s'écrase sur zéro **sans jamais l'atteindre**. Écrire « $e^x = 0$ » est une faute, quelle que soit la valeur de x.

8. Croissances comparées



2.5 — Croissances comparées : x^3 domine un temps, puis e^x l'emporte définitivement (croisement vers $x \approx 4{,}5$)

Théorème 2.9. Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

Démonstration pour $n = 1$. Posons $h(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$ sur $[0\,;+\infty[$. Alors

$$h'(x) = e^x - x > 0$$

d'après le théorème 2.7. Donc h est croissante, et $h(0) = 1 > 0$: ainsi $e^x > \dfrac{x^2}{2}$ pour tout $x \geqslant 0$. En divisant par $x > 0$:

$$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$$

Le membre de droite tendant vers $+\infty$, le théorème de comparaison conclut. ■

Démonstration de la troisième limite. On pose $X = -x$. Quand $x \to -\infty$, $X \to +\infty$, et

$$x\,e^x = -X\,e^{-X} = -\frac{X}{e^X} = -\frac{1}{\dfrac{e^X}{X}}$$

Or $\dfrac{e^X}{X} \to +\infty$, donc le quotient tend vers 0. ■

➤ **À retenir en une phrase. L'exponentielle l'emporte sur la puissance, qui l'emporte sur le logarithme.** Cette hiérarchie règle presque toutes les formes indéterminées du programme.

MÉTHODES

Méthode 1 — Limite d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$f(1)$	↘	0

2.6 — Lecture d'un tableau de limites : les limites aux bornes se lisent aux extrémités des flèches

1. Repérer le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.
2. Factoriser chacun par son terme dominant.
3. Simplifier : tous les autres quotients tendent vers 0.
4. Conclure sur le quotient des termes dominants.

Exemple éclair. $\dfrac{3x^2-x}{x^2+5} = \dfrac{x^2\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{5}{x^2}\right)} \longrightarrow 3.$

➤ **Astuce de contrôle.** Le résultat ne dépend que des degrés : égaux, la limite est le quotient des coefficients dominants ; numérateur plus grand, la limite est infinie ; dénominateur plus grand, la limite est nulle. Vérifiez toujours votre calcul avec cette règle.

Méthode 2 — Limite en un point annulant le dénominateur

1. Calculer la limite du numérateur : si elle est non nulle, la limite sera infinie.
2. Déterminer le **signe** du dénominateur à gauche puis à droite de a.
3. En déduire les deux limites latérales, souvent opposées.
4. Conclure à une asymptote verticale d'équation $x = a$.

■ **Erreur à éviter.** Si le numérateur s'annule **aussi** en a, la forme est $\dfrac{0}{0}$: il faut factoriser et simplifier avant toute conclusion. La limite peut alors être finie.

Méthode 3 — Lever une indétermination avec une racine

1. Identifier la forme $\infty - \infty$ due à une différence de racines.
2. Multiplier et diviser par la **quantité conjuguée**.
3. Utiliser $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ pour faire disparaître les racines du numérateur.
4. Reprendre la méthode 1 sur l'expression obtenue.

Exemple éclair. $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \longrightarrow 0$ en $+\infty$.

Méthode 4 — Limite d'une composée

1. Poser explicitement $X = u(x)$.
2. Déterminer $\lim_{x \to a} u(x) = b$.
3. Déterminer $\lim_{X \to b} g(X)$.
4. Conclure en enchaînant les deux limites.

➤ **Bon réflexe.** Écrivez les deux limites sur deux lignes distinctes. C'est la seule façon de montrer au correcteur que le changement de variable est maîtrisé et non deviné.

Méthode 5 — Utiliser les théorèmes de comparaison

1. Repérer le terme borné — presque toujours sin ou cos.
2. Écrire l'encadrement de départ : $-1 \leqslant \sin(\dots) \leqslant 1$.
3. Transformer l'encadrement jusqu'à faire apparaître $f(x)$ au centre, en **surveillant le signe** des facteurs.
4. Vérifier que les deux bornes ont la même limite, puis conclure.

■ **Erreur à éviter.** Multiplier un encadrement par une quantité négative sans inverser les inégalités. Si le facteur change de signe, traitez les deux cas séparément.

Méthode 6 — Déterminer une asymptote oblique

★ Hors programme — approfondissement

Quand. La fonction tend vers l'infini, mais sa courbe semble longer une droite non horizontale.

1. Si l'énoncé fournit la droite $y = ax + b$, étudier directement $d(x) = f(x) - (ax + b)$.
2. Montrer que $\lim_{x \to \pm\infty} d(x) = 0$: la droite est alors asymptote oblique.
3. Étudier le **signe** de d pour préciser la position de la courbe.
4. Pour une fonction rationnelle, la division du numérateur par le dénominateur fournit directement a, b et le reste.

➤ **Astuce.** Une fraction rationnelle dont le numérateur a exactement un degré de plus que le dénominateur admet toujours une asymptote oblique. Le repérage est immédiat, avant tout calcul.

Méthode 7 — Lever une indétermination avec l'exponentielle

Quand. L'expression mêle une exponentielle et une puissance, et la limite se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ ou $0 \times \infty$.

1. Identifier le terme **dominant** : en $+\infty$ c'est toujours l'exponentielle.
2. Le mettre en facteur, au numérateur comme au dénominateur.
3. Faire apparaître le quotient de référence $\frac{e^x}{x^n}$, ou son inverse.
4. Citer le théorème des croissances comparées et conclure.

Exemple éclair. $e^x - x^3 = e^x \left(1 - \frac{x^3}{e^x}\right) \longrightarrow +\infty$, la parenthèse tendant vers 1.

➤ **À retenir en une phrase. L'exponentielle l'emporte sur la puissance, qui l'emporte sur le logarithme.** En $-\infty$, c'est l'exponentielle qui s'écrase et la puissance qui perd : $x^n e^x \to 0$.

ERREURS FRÉQUENTES ET BONS RÉFLEXES

■ Erreur	✓ Bon réflexe
Appliquer le raccourci des plus hauts degrés en un point fini	Il n'est valable qu'en $\pm\infty$
Écrire $\lim_{x\to 3} \dfrac{1}{x-3} = \infty$ sans signe	Il faut deux limites : à gauche et à droite
Croire qu'une limite en a exige f définie en a	Le plus souvent, elle ne l'est pas
Écrire $\sqrt{x^2} = x$ en $-\infty$	$\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert = -x$ lorsque $x < 0$
Confondre asymptote horizontale et verticale	Limite finie en $\pm\infty \to$ horizontale ; limite infinie en $a \to$ verticale
Conclure $\lim_{x\to+\infty} \sin x = 0$ parce que $\sin x$ « oscille »	$\sin x$ n'a pas de limite ; on l'utilise borné

MODULE PYTHON — EXPLORATION NUMÉRIQUE D'UNE LIMITE

```
# Exploration numerique d'une limite

def f(x):
    return (x ** 2 - 4) / (x - 2)

def g(x):
    return (x ** 2 + 1) ** 0.5 - x

print("f(x) = (x**2 - 4)/(x - 2) au voisinage de 2")
print("par valeurs superieures :")
for k in range(1, 6):
    h = 10 ** (-k)
    x = 2 + h
    print("x =", round(x, 7), " f(x) =", round(f(x), 7))

print()
print("g(x) = sqrt(x**2 + 1) - x quand x tend vers +oo")
x = 1
for k in range(1, 4):
    x = x * 10
    print("x =", x, " g(x) =", round(g(x), 9))
```

Trace d'exécution

```
f(x) = (x**2 - 4)/(x - 2) au voisinage de 2
par valeurs superieures :
x = 2.1 f(x) = 4.1
x = 2.01 f(x) = 4.01
x = 2.001 f(x) = 4.001
x = 2.0001 f(x) = 4.0001
x = 2.00001 f(x) = 4.00001

g(x) = sqrt(x**2 + 1) - x quand x tend vers +oo
x = 10 g(x) = 0.049875621
x = 100 g(x) = 0.004999875
x = 1000 g(x) = 0.0005
```

Interprétation mathématique. La première trace fait apparaître $f(x) \approx x + 2$, ce que la factorisation confirme exactement. La seconde montre que $g(x)$ est divisée par 10 chaque fois que x est multiplié par 10 : c'est le comportement de $\dfrac{1}{2x}$, cohérent avec la forme conjuguée $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

■ **Ce que l'exploration ne fait pas.** Elle **suggère** une limite, elle ne la démontre jamais. La fonction $\sin(\frac{1}{x})$ explorée en 0 avec les pas $10^{-1}, 10^{-2}, \ldots$ donne toujours $\sin(10^k)$, des valeurs oscillantes qui ne prouvent rien — et cette fonction n'a effectivement pas de limite en 0. **Un tableau de valeurs n'est pas une preuve.**

SYNTHÈSE

Les trois réflexes du chapitre

1. En $\pm\infty$, les plus hauts degrés ; en un point, on factorise.
2. Une limite infinie en un point se décline toujours à gauche **et** à droite.
3. En $-\infty$, $\sqrt{x^2} = -x$.