Chapitre 3. Cours

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Objectifs du chapitre — programme officiel (BO 2019)

Ce document contient. Cours complet : définitions, propriétés et démonstrations exigibles, fiches méthodes guidées, exemples résolus et synthèse du chapitre.

Extrait du manuel *Math Convergence — Terminale, spécialité mathématiques*
A. Choukoukou · session 2027 · reproduit avec l'autorisation de l'auteur.

CHAPITRE

3

CONTINUITÉ ET THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Un seul théorème, mais celui qui permet de prouver qu'une équation a une solution sans savoir la résoudre. Vous l'utiliserez dans presque tous les sujets de baccalauréat.

Objectifs. Reconnaître une fonction continue · appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire · déterminer un encadrement d'une solution par dichotomie · justifier la limite d'une suite définie par récurrence.

Compétences travaillées. Raisonner (dominante) · Chercher · Communiquer

Prérequis. Chapitre 2 : limites en un point, limites à gauche et à droite · chapitre 1 : suites récurrentes, théorème de la limite monotone · tableaux de variations.

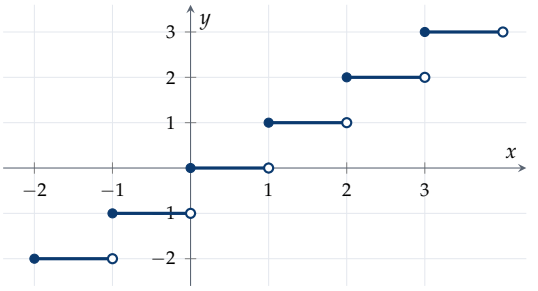
Diagnostic express.

1. Tracer mentalement $x \mapsto x^3$. Peut-on la tracer sans lever le crayon ?
2. Résoudre $x^2 = 5$ puis donner une valeur approchée des solutions.
3. Que vaut $f(2)$ pour $f(x) = x^3 + x - 1$?
4. Une fonction strictement croissante peut-elle prendre deux fois la même valeur ?
5. Comment couper un intervalle en deux parties égales ?

Corrigé en fin de chapitre.

COURS

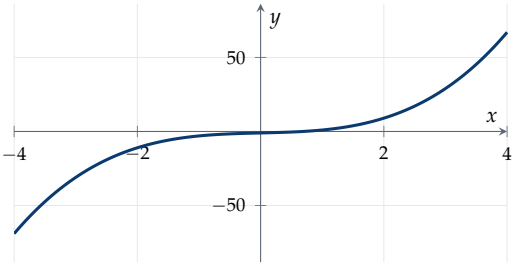
1. Continuité



3.1 — Une fonction discontinue : la partie entière

Définition 3.1. f est **continue en** a lorsque $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Elle est continue sur un intervalle I lorsqu'elle l'est en tout point de I.

Interprétation graphique. La courbe se trace **sans lever le crayon** sur I.



3.2 — La fonction $f(x) = x^3 + x - 1$

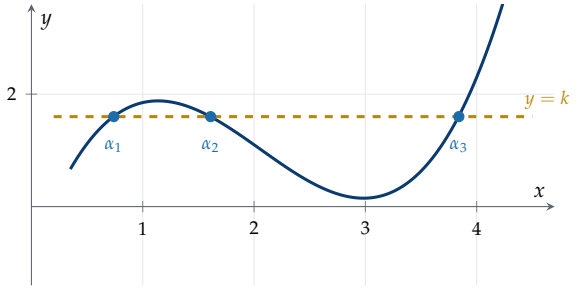
Théorème 3.2. Toute fonction **dérivable** sur I y est continue.

Sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition : les fonctions polynomiales, rationnelles, la racine carrée, l'exponentielle, le logarithme, le sinus et le cosinus. Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues le sont aussi.

■ **Erreur à éviter.** La réciproque du théorème 3.2 est **fausse**. $x \mapsto |x|$ est continue en 0 sans y être dérivable : la courbe présente un point anguleux, pas une rupture.

➤ **Bon réflexe.** Les fonctions **définies par morceaux** sont les seules dont la continuité pose réellement question. Aux points de raccord, calculez les deux limites latérales et comparez-les à la valeur de la fonction.

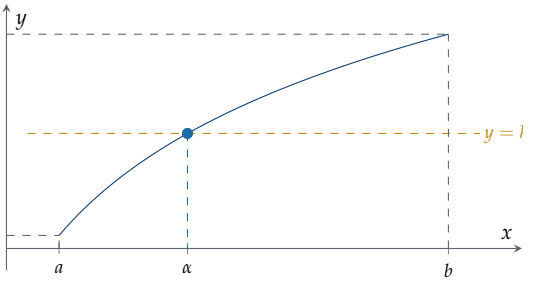
2. Théorème des valeurs intermédiaires



3.3 — Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3.3 (valeurs intermédiaires). Si f est **continue** sur $[a\,;\,b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une** solution dans $[a\,;\,b]$.

Théorème 3.4 (corollaire, dit « de la bijection »). Si de plus f est **strictement monotone** sur $[a\,;\,b]$, la solution est **unique**.



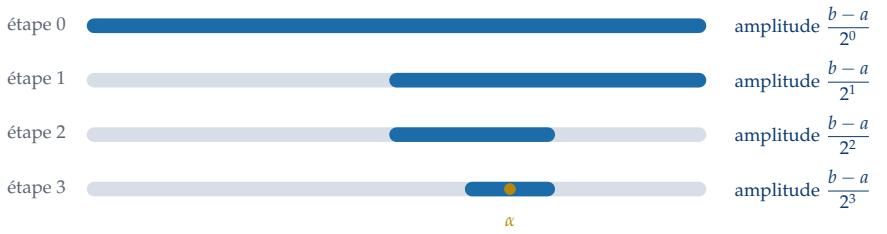
3.4 — Le corollaire en image : f strictement croissante, une solution et une seule

Extension aux intervalles ouverts. Le théorème s'applique encore sur $]a\,;\,b[$, $[a\,;\,+\infty[$ ou $\mathbb{R}$, en remplaçant $f(a)$ et $f(b)$ par les limites aux bornes.

■ **Erreur à éviter.** Le théorème exige la continuité. Sans elle, la courbe peut « sauter » par-dessus la valeur k : l'équation n'a alors aucune solution, même si k est bien compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

➤ **Rédaction attendue.** Trois éléments, systématiquement : **continuité**, **stricte monotonie**, **encadrement de** k par les valeurs ou limites aux bornes. Chacun vaut un point ; il en manque un dans la plupart des copies.

3. Méthode de dichotomie



3.5 — La dichotomie : l'amplitude est divisée par deux

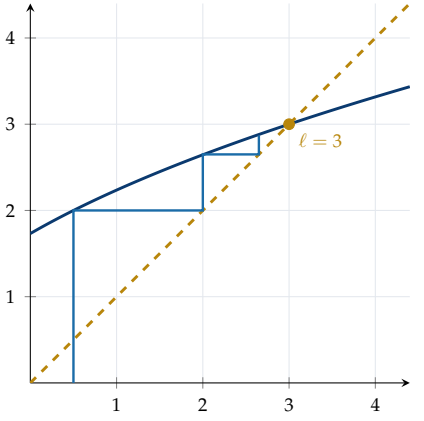
Pour approcher la solution de $f(x) = 0$ sur $[a\,;\,b]$ où f change de signe, on coupe l'intervalle en deux à chaque étape et l'on conserve la moitié où le changement de signe subsiste.

> **Après n étapes, l'amplitude de l'encadrement vaut $\dfrac{b-a}{2^n}$.**

Exemple d'application. Pour une amplitude inférieure à 10^{-3} sur $[0\,;\,1]$, il faut $\dfrac{1}{2^n} < 10^{-3}$, soit $2^n > 1000$ et $n \geqslant 10$.

➤ **Astuce.** Chaque étape gagne un facteur 2, et $2^{10} \approx 10^3$: **dix étapes gagnent trois décimales**. Ce repère permet de répondre de tête à la plupart des questions de précision.

4. Suites définies par récurrence et point fixe



3.6 — Point fixe : la limite vérifie $\ell = f(\ell)$

> **Théorème 3.5 (point fixe).** Soit (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f **continue**. Si (u_n) converge vers ℓ, alors ℓ vérifie
>
> $$f(\ell) = \ell$$

Marche à suivre complète.
1. Démontrer que la suite est **bornée** — souvent par récurrence.
2. Démontrer qu'elle est **monotone**.
3. Conclure à la convergence par le théorème de la limite monotone.
4. Résoudre $f(\ell) = \ell$ et **choisir** la racine compatible avec l'encadrement.

■ **Erreur à éviter.** Résoudre $f(\ell) = \ell$ **sans avoir prouvé la convergence**. L'équation du point fixe donne les candidats, pas l'existence de la limite : une suite divergente peut très bien admettre un point fixe.

➤ **Bon réflexe.** Quand l'équation $f(\ell) = \ell$ a plusieurs solutions, l'encadrement établi à l'étape 1 tranche. C'est à cela qu'il sert, au-delà de la convergence.

MÉTHODES

Méthode 1 — Appliquer le TVI pour prouver l'existence

1. Justifier la **continuité** de f sur l'intervalle — en invoquant les opérations sur les fonctions usuelles.
2. Calculer $f(a)$ et $f(b)$, ou les limites si l'intervalle est ouvert.
3. Vérifier que k est **compris entre** ces deux valeurs.
4. Conclure : « d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet au moins une solution ».

■ **Erreur à éviter.** Écrire « f est continue » sans le justifier. Un mot suffit — « somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ » — mais il doit y être.

Méthode 2 — Obtenir l'unicité

1. Reprendre les trois points de la méthode 1.
2. Calculer f' et établir son **signe constant** sur l'intervalle.
3. En déduire la stricte monotonie.
4. Conclure au caractère **unique** de la solution.

➤ **Bon réflexe.** Une dérivée positive s'annulant en des **points isolés** laisse la stricte monotonie. Dites-le explicitement : c'est un demi-point à chaque fois.

Méthode 3 — Encadrer par dichotomie

1. Vérifier que f change de signe entre a et b.
2. Calculer $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ et conserver la moitié où le changement subsiste.
3. Recommencer jusqu'à l'amplitude demandée.
4. Pour une amplitude ε, le nombre d'étapes vérifie $\dfrac{b-a}{2^n} < \varepsilon$.

Exemple éclair. Sur $[1\,;2]$, atteindre 10^{-2} demande $2^n > 100$, soit $n = 7$.

Méthode 4 — Déterminer la limite d'une suite récurrente

1. Conjecturer l'encadrement et la monotonie sur les premiers termes.
2. Démontrer l'encadrement **par récurrence**.
3. Démontrer la monotonie — par récurrence, ou par le signe de $u_{n+1} - u_n$.
4. Conclure à la convergence par le théorème de la limite monotone.
5. Résoudre $f(\ell) = \ell$ et retenir la racine compatible avec l'encadrement.

➤ **Astuce.** Les étapes 2 et 3 se démontrent souvent d'un seul coup, par une récurrence portant sur la proposition « $a \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant b$ ».

Méthode 5 — Étudier la continuité d'une fonction définie par morceaux

1. Sur chaque morceau ouvert, la continuité découle des fonctions usuelles.
2. Aux points de raccord a, calculer $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.
3. Comparer ces deux limites à $f(a)$.
4. Conclure : la continuité exige l'**égalité des trois** valeurs.

➤ **Bon réflexe.** Quand un paramètre apparaît dans l'expression, l'égalité des trois valeurs fournit une **équation** qui le détermine. C'est la forme la plus fréquente de la question.

Méthode 6 — Localiser une solution à l'aide d'un tableau de variations

Quand. L'énoncé demande le **nombre** de solutions de $f(x) = k$ sur un intervalle, sans les calculer.

1. Dresser le tableau de variations complet, limites aux bornes comprises.
2. Repérer les intervalles où f est strictement monotone.
3. Sur chacun, comparer k aux valeurs atteintes aux extrémités.
4. Compter une solution par intervalle où k est encadré, aucune sinon.

➤ **Astuce.** Le tableau de variations **est** la démonstration : chaque flèche monotone représente une application du corollaire. Il suffit de dire, pour chaque branche, si k y est atteint.

ERREURS FRÉQUENTES ET BONS RÉFLEXES

■ Erreur	✓ Bon réflexe
Appliquer le TVI sans justifier la continuité	C'est l'hypothèse qui fait tout le théorème
Conclure à l'unicité avec le TVI seul	Il faut la stricte monotonie
Croire que continuité entraîne dérivabilité	$\lvert x \rvert$ en 0 : continue, non dérivable
Écrire $f(a) \times f(b) < 0$ sans le dire	Formulation acceptée, mais il faut annoncer que 0 est entre $f(a)$ et $f(b)$
Passer à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ sans continuité	Théorème 3.5, hypothèse à citer
Donner α au lieu d'un encadrement	La dichotomie fournit un encadrement, non une valeur exacte

MODULE PYTHON — DICHOTOMIE

```
# Dichotomie : encadrement d'une solution de f(x) = 0

def f(x):
    return x ** 3 + x - 1

def dichotomie(a, b, precision):
    # f(a) et f(b) sont de signes contraires
    etape = 0
    while b - a > precision:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
        etape = etape + 1
        print("etape", etape, ": [", round(a, 6), ";", round(b, 6), "]")
    return a

print("f(x) = x**3 + x - 1 sur [0 ; 1], precision 0.01")
alpha = dichotomie(0, 1, 0.01)
print("solution approchee :", round(alpha, 6))
```

Trace d'exécution

```
f(x) = x**3 + x - 1 sur [0 ; 1], precision 0.01
etape 1 : [ 0.5 ; 1 ]
etape 2 : [ 0.5 ; 0.75 ]
etape 3 : [ 0.625 ; 0.75 ]
etape 4 : [ 0.625 ; 0.6875 ]
etape 5 : [ 0.65625 ; 0.6875 ]
etape 6 : [ 0.671875 ; 0.6875 ]
etape 7 : [ 0.679688 ; 0.6875 ]
solution approchee : 0.679688
```

Interprétation mathématique. L'amplitude est exactement divisée par 2 à chaque étape : $1\,;\,0,5\,;\,0,25\,;\,\ldots$ soit $\dfrac{1}{2^n}$. Sept étapes suffisent pour descendre sous $0,01$, ce qui se prévoit sans calcul : $\dfrac{1}{2^7} = 0,0078 < 0,01$ tandis que $\dfrac{1}{2^6} = 0,0156 > 0,01$.

La valeur exacte est $\alpha \approx 0,682328$, bien contenue dans l'encadrement obtenu. **L'algorithme ne donne jamais** α : il donne un encadrement aussi fin qu'on veut, ce que le TVI permet d'affirmer.

SYNTHÈSE

Les trois réflexes du chapitre

1. Toujours justifier la continuité avant d'invoquer le TVI.
2. Existence $\neq$ unicité : la stricte monotonie fait la différence.
3. La dichotomie donne un encadrement, jamais une valeur.

EXERCICES

SÉRIE A ★

EXERCICE 74 ★

Justifier que chaque fonction est continue sur l'intervalle indiqué.

a. $f(x) = x^3 - 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$

b. $g(x) = \dfrac{1}{x-4}$ sur $]4\,;+\infty[$

c. $h(x) = \sqrt{x+1}$ sur $[-1\,;+\infty[$

EXERCICE 75 ★

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$. Calculer $f(0)$ et $f(1)$. Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 76 ★

f est continue sur $[1\,;4]$, $f(1) = -3$ et $f(4) = 5$. Que peut-on affirmer sur l'équation $f(x) = 0$?

EXERCICE 77 ★

Même énoncé qu'à l'exercice précédent, en ajoutant que f est strictement croissante sur $[1\,;4]$. Que peut-on affirmer de plus ?

EXERCICE 78 ★

$f(x) = x^2 - 3$ sur $[1\,;2]$. Effectuer **deux** étapes de dichotomie pour encadrer la solution de $f(x) = 0$.

EXERCICE 79 ★

Soit f définie par $f(x) = 2x + 1$ si $x < 1$ et $f(x) = 3$ si $x \geqslant 1$. Étudier la continuité de f en 1.

EXERCICE 80 ★

Combien d'étapes de dichotomie faut-il, à partir de l'intervalle $[1\,;2]$, pour obtenir un encadrement d'amplitude inférieure à 0,01 ?