Chapitre 3. Exercices corrigés

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Objectifs du chapitre — programme officiel (BO 2019)

Ce document contient. Séries d'exercices progressives, entièrement corrigées, des automatismes aux exercices de type bac.

Extrait du manuel *Math Convergence — Terminale, spécialité mathématiques*
A. Choukoukou · session 2027 · reproduit avec l'autorisation de l'auteur.

SYNTHÈSE

Les trois réflexes du chapitre

1. Toujours justifier la continuité avant d'invoquer le TVI.
2. Existence $\neq$ unicité : la stricte monotonie fait la différence.
3. La dichotomie donne un encadrement, jamais une valeur.

EXERCICES

SÉRIE A ★

EXERCICE 74 ★

Justifier que chaque fonction est continue sur l'intervalle indiqué.

a. $f(x) = x^3 - 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$

b. $g(x) = \dfrac{1}{x-4}$ sur $]4\,;+\infty[$

c. $h(x) = \sqrt{x+1}$ sur $[-1\,;+\infty[$

EXERCICE 75 ★

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$. Calculer $f(0)$ et $f(1)$. Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 76 ★

f est continue sur $[1\,;4]$, $f(1) = -3$ et $f(4) = 5$. Que peut-on affirmer sur l'équation $f(x) = 0$?

EXERCICE 77 ★

Même énoncé qu'à l'exercice précédent, en ajoutant que f est strictement croissante sur $[1\,;4]$. Que peut-on affirmer de plus ?

EXERCICE 78 ★

$f(x) = x^2 - 3$ sur $[1\,;2]$. Effectuer **deux** étapes de dichotomie pour encadrer la solution de $f(x) = 0$.

EXERCICE 79 ★

Soit f définie par $f(x) = 2x + 1$ si $x < 1$ et $f(x) = 3$ si $x \geqslant 1$. Étudier la continuité de f en 1.

EXERCICE 80 ★

Combien d'étapes de dichotomie faut-il, à partir de l'intervalle $[1\,;2]$, pour obtenir un encadrement d'amplitude inférieure à 0,01 ?

SÉRIE B ★★

EXERCICE 81 ★★

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$ sur $[0\,;1]$.
a. Justifier que f est continue et strictement croissante sur $[0\,;1]$.
b. En déduire que $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\,;1]$.

EXERCICE 82 ★★

Reprendre l'exercice 81 et donner un encadrement de α d'amplitude $0,125$ par dichotomie.

EXERCICE 83 ★★

Soit f définie par $f(x) = x^2 - 1$ si $x < 2$ et $f(x) = ax + 1$ si $x \geqslant 2$. Déterminer a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 84 ★★

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $[0\,;1]$. Démontrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans cet intervalle, puis en donner un encadrement d'amplitude $0,25$.

EXERCICE 85 ★★

Soit f continue sur $[0\,;3]$, de tableau de variations :

x	0		1		3
f	-2	↗	4	↘	1

Déterminer le nombre de solutions de $f(x) = 0$ sur $[0\,;3]$, puis de $f(x) = 2$.

EXERCICE 86 ★★

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{2}$. On admet que (u_n) converge. Justifier, en citant le théorème utilisé, que sa limite vérifie $\ell = \dfrac{\ell + 6}{2}$, puis déterminer ℓ.

EXERCICE 87 ★★

Démontrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une **unique** solution sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 88 ★★

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ si $x \neq 2$, et $f(2) = m$.
Déterminer m pour que f soit continue en 2.

EXERCICE 89 ★★

Soit $f(x) = x^5 + 3x - 2$ sur $[0\,;\,1]$. Par deux étapes de dichotomie, encadrer la solution de $f(x) = 0$ dans un intervalle d'amplitude 0,25.

SÉRIE C ★★★

EXERCICE 90 ★★★

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

a. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer le nombre exact de solutions de $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$, en justifiant chacune.

EXERCICE 91 ★★★

Écrire une fonction Python $dicho(f, a, b, p)$ renvoyant un encadrement d'amplitude inférieure à p d'une solution de $f(x) = 0$. Préciser les hypothèses sous lesquelles elle est correcte, puis l'appliquer à $f(x) = x^2 - 3$ sur $[1\,;\,2]$ avec $p = 0,05$.

EXERCICE 92 ★★★

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.

b. Démontrer que (u_n) est croissante.

c. En déduire sa convergence, puis déterminer sa limite en justifiant le passage à la limite.

EXERCICE 93 ★★★

Soit $f(x) = x^3 + x$ sur $\mathbb{R}$. Démontrer que pour tout réel k, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. *On étendra le corollaire aux limites en* $\pm\infty$.

EXERCICE 94 ★★★

a. Donner un exemple de fonction définie sur $[0\,;\,1]$, non continue, vérifiant $f(0) < 0 < f(1)$ et ne s'annulant jamais.

b. Que montre cet exemple sur l'hypothèse de continuité du TVI ?

EXERCICE 95 ★★★

Soit $f(x) = e^x - 3x$ sur $\mathbb{R}$.

a. Étudier les variations de f et calculer son minimum.

b. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

EXERCICE 96 ★★★

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = a$. Déterminer a pour que f soit continue en 0.

SÉRIE D ★★★★

EXERCICE 97 ★★★★

Soit $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ sur $[0\,;+\infty[$, et (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Démontrer que pour tout n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

b. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[1\,;2]$, et la déterminer exactement.

c. Démontrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$, puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On admettra que pour $x \geqslant 1$, $|f(x) - f(\alpha)| \leqslant \dfrac{1}{4}|x - \alpha|$.

EXERCICE 98 ★★★★

Soit f continue sur $[0\,;1]$ telle que $f(0) = f(1)$. On pose $g(x) = f(x + \dfrac{1}{2}) - f(x)$ pour $x \in [0\,;\dfrac{1}{2}]$.

a. Justifier que g est continue sur $[0\,;\dfrac{1}{2}]$.

b. Calculer $g(0) + g(\dfrac{1}{2})$.

c. En déduire qu'il existe $c \in [0\,;\dfrac{1}{2}]$ tel que $f(c + \dfrac{1}{2}) = f(c)$.

EXERCICE 99 ★★★★

Soit $f(x) = x^4 - 4x + 1$.

a. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer le nombre de solutions de $f(x) = 0$.

c. Encadrer chacune à 10^{-1} près.

EXERCICE 100 ★★★★

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ si $x \neq 3$, et $f(3) = m$.

a. Pour quelle valeur de m la fonction f est-elle continue en 3 ?

b. Avec cette valeur, f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Donner une expression simple de f.

EXERCICE 101 ★★★★

Soit $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ sur $[0\,;1]$.

a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;1]$.

b. Par deux étapes de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude 0,25.

EXERCICE 102 ★★★★

Soit (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{3\,u_n}$.

a. Démontrer par récurrence que $3 \leqslant u_n \leqslant 4$ pour tout n.

b. Démontrer que (u_n) est décroissante.

c. Déterminer sa limite.

EXERCICE 103 ★★★★

Démontrer que l'équation $\ln x = 2 - x$ admet une unique solution sur $]0\,;+\infty[$, puis en donner un encadrement d'amplitude 0,1.

EXERCICE 104 ★★★★

Soit f définie par $f(x) = ax + b$ si $x \leqslant 1$ et $f(x) = x^2 + 1$ si $x > 1$.

a. Déterminer une relation entre a et b pour que f soit continue en 1.

b. Déterminer a et b pour que f soit de plus dérivable en 1.

SÉRIE E ★★★★★

EXERCICE 105 ★★★★★

Soit f continue sur $[0\,;1]$ et à valeurs dans $[0\,;1]$. Démontrer qu'il existe $c \in [0\,;1]$ tel que $f(c) = c$. *On pourra considérer* $g(x) = f(x) - x$.

➤ Un réel c tel que $f(c) = c$ est appelé **point fixe** de f. Le résultat démontré ici est connu sous le nom de **théorème du point fixe** : toute fonction continue de $[0\,;1]$ dans $[0\,;1]$ admet au moins un point fixe.

EXERCICE 106 ★★★★★

Soit $f(x) = x\,e^x$ sur $\mathbb{R}$.

a. Étudier les variations de f et déterminer son minimum.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c. Discuter, selon la valeur du réel k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

EXERCICE 107 ★★★★★

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$ et α son unique racine réelle.

a. Démontrer que $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$.

b. Combien d'étapes de dichotomie faut-il, à partir de $[0\,;1]$, pour atteindre une amplitude inférieure à 10^{-3} ?

c. ★ *Approfondissement.* Démontrer que α est l'unique point fixe de $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $[0\,;1]$.