Chapitre 4. Cours

Compléments sur la dérivation et convexité

Objectifs du chapitre — programme officiel (BO 2019)

Ce document contient. Cours complet : définitions, propriétés et démonstrations exigibles, fiches méthodes guidées, exemples résolus et synthèse du chapitre.

Extrait du manuel *Math Convergence — Terminale, spécialité mathématiques*
A. Choukoukou · session 2027 · reproduit avec l'autorisation de l'auteur.

CHAPITRE

4

COMPLÉMENTS SUR LA DÉRIVATION ET CONVEXITÉ

*La dérivée première dit si la courbe monte ou descend. La dérivée seconde dit **comment** : en se creusant ou en se bombant. Cette information vaut des points à chaque sujet de baccalauréat, et elle démontre des inégalités qu'aucun calcul direct n'atteint.*

Objectifs. Dériver une fonction composée · calculer et interpréter une dérivée seconde · étudier la convexité d'une fonction · déterminer les points d'inflexion · situer une courbe par rapport à ses tangentes · démontrer une inégalité par convexité.

Compétences travaillées. Calculer (dominante) · Représenter · Raisonner

Prérequis. Dérivation de Première : nombre dérivé, tangente, dérivées usuelles, dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient · chapitre 3 : lien dérivabilité–continuité · étude de signe.

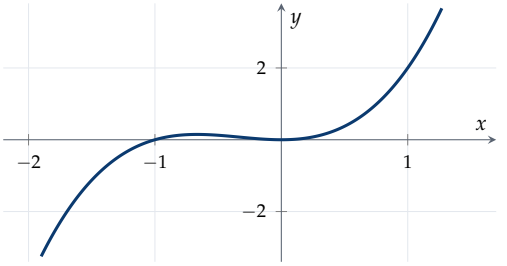
Diagnostic express.

1. Dériver $f(x) = 3x^4 - 2x + 7$.
2. Dériver $g(x) = x^2(x+1)$.
3. Donner l'équation de la tangente à $y = x^2$ au point d'abscisse 1.
4. Résoudre $6x - 12 > 0$.
5. Une fonction dont la dérivée est croissante : que dire de sa courbe ?

Corrigé en fin de chapitre.

COURS

1. Rappels de Première



4.1 — La fonction $g(x) = x^2\,(x+1)$

Dérivées des fonctions usuelles.

Fonction	Dérivée	Validité
k **(constante)**	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{Z}^*)$	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$, **ou** $\mathbb{R}^*$ **si** $n < 0$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$

Opérations et composées (u et v dérivables, k constante).

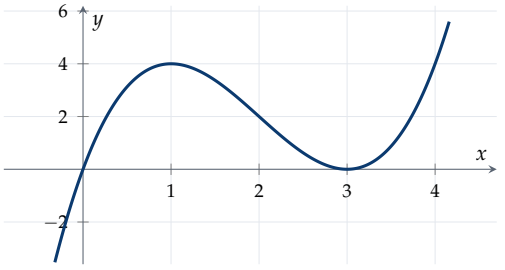
Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$	$k\,u$	$k\,u'$
$u\,v$	$u'v+uv'$	$\dfrac{1}{v}$ $(v\neq 0)$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
$\dfrac{u}{v}$ $(v\neq 0)$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	$x\mapsto u(ax+b)$	$x\mapsto a\,u'(ax+b)$
e^u	$u'\,e^u$	$\ln u$ $(u>0)$	$\dfrac{u'}{u}$
$\sqrt{u}$ $(u>0)$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	u^n $(n\in\mathbb{Z}^*)$	$n\,u'\,u^{n-1}$
$\sin u$	$u'\cos u$	$\cos u$	$-u'\sin u$

Tangente. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est

$$y = f'(a)\,(x-a)+f(a)$$

➤ **Bon réflexe.** Au dénominateur du quotient, le carré porte sur v **seul**. Et l'ordre $u'v-uv'$ n'est pas commutatif : inverser les deux termes change le signe de toute l'étude.

2. Dérivée d'une fonction composée



4.2 — La fonction $f(x)=x^3-6x^2+9x$

Théorème 4.1. Si u est dérivable sur I et g dérivable sur $u(I)$, alors $g\circ u$ est dérivable sur I et

$$\big(g\circ u\big)'(x) = u'(x)\times g'\big(u(x)\big)$$

Cas usuels.

$$\big(u^n\big)' = n\,u'\,u^{n-1} \qquad \big(e^u\big)' = u'\,e^u \qquad \big(\ln u\big)' = \frac{u'}{u} \qquad \big(\sqrt{u}\big)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Exemple d'application. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ donne $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, du signe de x.

Le cas de l'exponentielle. Pour u dérivable sur I :

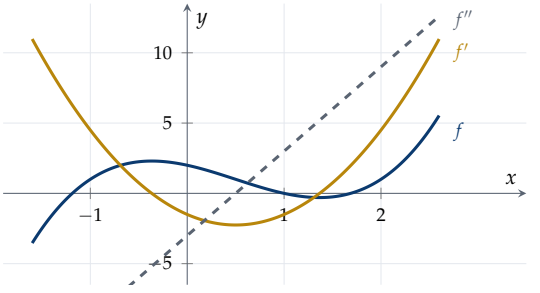
$$\left(e^{u}\right)' = u'\,e^{u}$$

L'exponentielle étant strictement positive, la dérivée de e^{u} a le signe de u' : la fonction e^{u} varie exactement comme u.

Exemple d'application. $f(x) = e^{-x^2}$ donne $f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$, du signe de $-x$: la fonction croît sur $]-\infty\,;\,0]$ puis décroît.

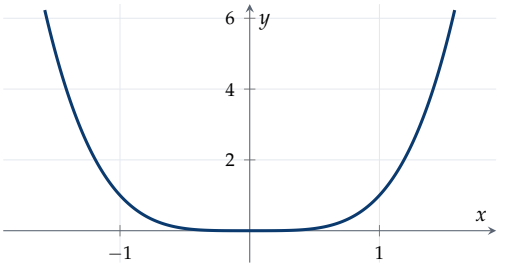
■ **Erreur à éviter.** Oublier le facteur u'. C'est l'erreur la plus fréquente du chapitre, et elle rend fausse toute l'étude de variations qui suit.

3. Dérivée seconde



4.3 — Lire f, f' et f'' ensemble

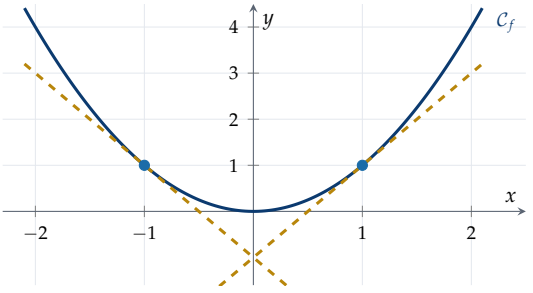
Définition 4.2. Si f' est elle-même dérivable sur I, sa dérivée est la **dérivée seconde** de f, notée f''.



4.4 — La fonction $f(x) = x^4$

f' renseigne sur le sens de variation ; f'' renseigne sur la manière dont il varie.

4. Convexité et concavité



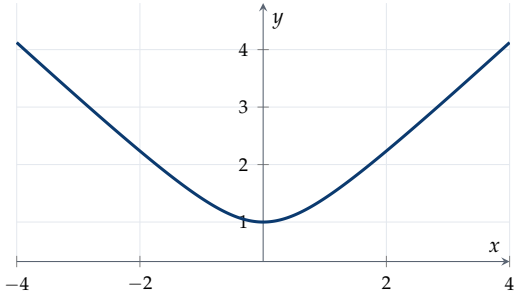
4.5 — Convexité : la courbe est au-dessus de ses tangentes

Définition 4.3. f est **convexe** sur I lorsque sa courbe est située au-dessus de chacune de ses tangentes. Elle est **concave** lorsqu'elle est située en dessous.

Théorème 4.4. Soit f deux fois dérivable sur I.

$$f \text{ convexe sur } I \iff f'' \geqslant 0 \text{ sur } I \iff f' \text{ croissante sur } I$$

$$f \text{ concave sur } I \iff f'' \leqslant 0 \text{ sur } I \iff f' \text{ décroissante sur } I$$



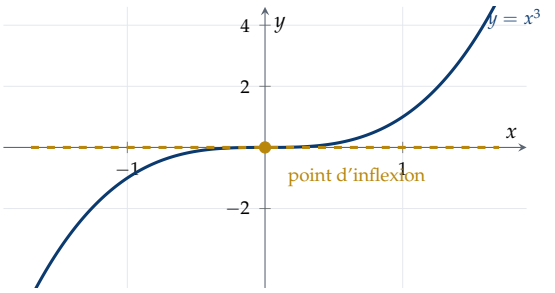
4.6 — La fonction $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

Caractérisation par les cordes. Une fonction convexe est située sous ses cordes ; une fonction concave est située au-dessus.

➤ **Astuce.** Convexe se lit « en creux », comme un bol qui retient l'eau : x^2, e^x. Concave se lit « en dôme » : $\sqrt{x}$, $\ln x$. La forme du mot ne dit rien, l'image si.

■ **Erreur à éviter.** Convexité et croissance sont indépendantes. e^{-x} est décroissante **et** convexe ; $\ln x$ est croissante **et** concave. Ne déduisez jamais l'une de l'autre.

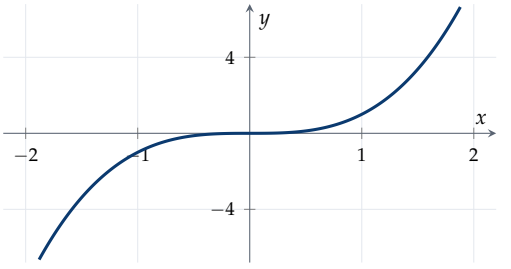
5. Point d'inflexion



4.7 — Point d'inflexion : la courbe traverse sa tangente

Définition 4.5. Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente, c'est-à-dire où la convexité change.

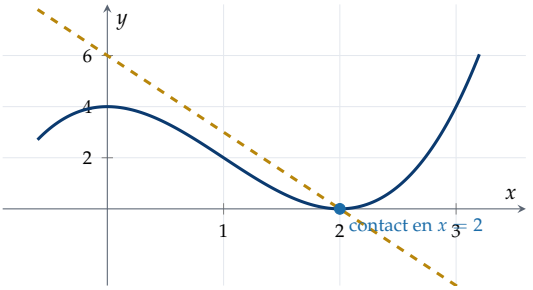
Théorème 4.6. f admet un point d'inflexion en a si et seulement si f'' **change de signe** en a.



4.8 — La fonction $f(x) = x^3$

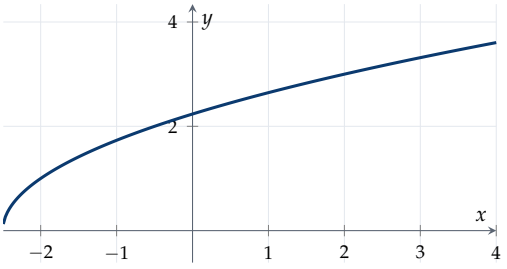
■ **Erreur à éviter.** $f''(a) = 0$ ne suffit pas. Pour $f(x) = x^4$, on a $f''(0) = 0$ mais f'' reste positive : la courbe ne traverse pas sa tangente, il n'y a **pas** de point d'inflexion. C'est le **changement de signe** qui compte.

6. Position d'une courbe par rapport à une tangente



4.9 — La position se lit sur le signe de $f(x) - T(x)$

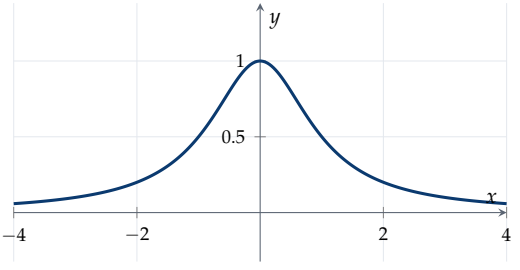
1. Écrire l'équation de la tangente T au point d'abscisse a.
2. Poser $d(x) = f(x) - \big(f'(a)(x-a) + f(a)\big)$.
3. Étudier le signe de d — souvent par factorisation, parfois par une nouvelle dérivation.
4. Conclure : $d > 0$ signifie courbe au-dessus, $d < 0$ en dessous.



4.10 — La fonction $f(x) = \sqrt{2x+5}$

➤ **Astuce.** Si f est convexe sur tout l'intervalle, la réponse est immédiate : la courbe est au-dessus, sans aucun calcul de différence. Vérifiez toujours la convexité avant de vous lancer.

7. Application : démontrer une inégalité



4.11 — La fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

La convexité fournit deux inégalités gratuites, valables sur tout intervalle où elle est établie :

Fonction convexe $\rightarrow$ au-dessus des tangentes, en dessous des cordes.
Fonction concave $\rightarrow$ en dessous des tangentes, au-dessus des cordes.

Exemple d'application. e^x est convexe sur $\mathbb{R}$ car $(e^x)'' = e^x > 0$. Sa tangente en 0 a pour équation $y = x + 1$, d'où l'inégalité fondamentale

$$e^x \geqslant x + 1 \quad \text{pour tout réel } x.$$

➤ **Bon réflexe.** Trois inégalités du programme se démontrent ainsi en trois lignes : $e^x \geqslant x + 1$, $\ln x \leqslant x - 1$ et $\sin x \leqslant x$ sur $[0\,;\,\pi]$. Toutes sont des comparaisons entre une courbe et sa tangente en un point bien choisi.

MÉTHODES

Méthode 1 — Dériver une composée

1. Identifier la fonction **intérieure** u et la fonction extérieure.
2. Calculer u' séparément.
3. Appliquer la formule correspondante, **sans oublier** le facteur u'.
4. Factoriser le résultat : c'est ce qui permettra l'étude de signe.

Exemple éclair. $f(x) = \left(3x^2 - 1\right)^5$: $u(x) = 3x^2 - 1$, $u'(x) = 6x$, donc $f'(x) = 30x\left(3x^2 - 1\right)^4$.

➤ **Bon réflexe.** La factorisation n'est pas un ornement. $30x\left(3x^2 - 1\right)^4$ a le signe de x, puisque la puissance quatrième est positive : l'étude est immédiate. Développer aurait rendu le signe illisible.

Méthode 2 — Étudier la convexité

1. Calculer f', puis f''.
2. Factoriser f'' autant que possible.
3. Dresser le tableau de signes de f''.
4. Conclure : $f'' \geqslant 0$ donne convexe, $f'' \leqslant 0$ donne concave — en précisant les intervalles.

■ **Erreur à éviter.** Confondre le tableau de signes de f' et celui de f''. Le premier donne les variations, le second la convexité. Ce sont deux tableaux distincts, et les deux sont demandés.

Méthode 3 — Déterminer les points d'inflexion

1. Résoudre $f''(x) = 0$: cela donne les **candidats**.
2. Étudier le **signe** de f'' de part et d'autre de chaque candidat.
3. Ne retenir que ceux où le signe change effectivement.
4. Donner les **coordonnées** du point, pas seulement son abscisse.

➤ **Bon réflexe.** L'étape 2 n'est pas facultative : $x \mapsto x^4$ annule sa dérivée seconde en 0 sans y présenter de point d'inflexion. C'est le contre-exemple à connaître.

Méthode 4 — Position par rapport à une tangente

1. Écrire l'équation de la tangente au point d'abscisse a.
2. Poser $d(x) = f(x) - y_T(x)$.
3. Étudier le signe de d : factorisation, ou étude de d' si nécessaire.
4. Conclure intervalle par intervalle.

➤ **Astuce.** $d(a) = 0$ et $d'(a) = 0$: le point de contact est toujours une **racine double**. Cherchez donc $(x-a)^2$ en facteur, cela accélère considérablement l'étude de signe.

Méthode 5 — Lire la convexité sur un graphique

1. Repérer les portions « en creux » — convexes — et « en dôme » — concaves.
2. Situer les points où la courbure s'inverse : ce sont les points d'inflexion.
3. Sur la courbe de f', la convexité de f correspond aux intervalles où f' **croît**.
4. Sur la courbe de f'', elle correspond aux intervalles où f'' est **au-dessus** de l'axe.

■ **Erreur à éviter.** Lire la convexité de f sur la courbe de f' comme s'il s'agissait de f. Sur la courbe de f', ce n'est pas la forme qui compte mais le **sens de variation**.

Méthode 6 — Démontrer une inégalité par convexité

Quand. L'énoncé demande de comparer une fonction à une droite, ou de majorer une expression contenant e^x, $\ln x$ ou $\sin x$.

1. Établir la convexité ou la concavité par le signe de f''.
2. Identifier la droite de comparaison : une **tangente** si l'inégalité doit valoir partout, une **corde** si elle porte sur un segment.
3. Écrire son équation.
4. Conclure par la propriété de position, en la citant.

➤ **Bon réflexe.** Trois lignes suffisent là où une étude de fonction en demanderait quinze. Avant toute étude de la différence, demandez-vous si la convexité ne règle pas la question.

ERREURS FRÉQUENTES ET BONS RÉFLEXES

■ Erreur	✓ Bon réflexe
Oublier u' en dérivant une composée	La dérivée de l'intérieur apparaît toujours en facteur
Conclure à un point d'inflexion sans changement de signe	Contre-exemple x^4 en 0
Confondre $f' \geqslant 0$ et $f'' \geqslant 0$	La première donne les variations, la seconde la convexité
Dériver $\sqrt{u}$ sans vérifier $u > 0$	La condition fait partie de la rédaction
Croire que convexe signifie croissante	x^2 est convexe sur $\mathbb{R}$ mais décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$
Lire la convexité de f sur le **signe** de f'	C'est le **sens de variation** de f' qui la donne

MODULE PYTHON — DÉTECTION NUMÉRIQUE D'UN POINT D'INFLEXION

```
# Detection numerique d'un point d'inflexion

def f(x):
    return x ** 3 - 6 * x ** 2 + 9 * x

def derivee_seconde(x):
    # approximation par difference finie centree
    h = 0.001
    return (f(x + h) - 2 * f(x) + f(x - h)) / (h * h)

def signe(y):
    if y > 0.001:
        return "+"
    if y < -0.001:
        return "-"
    return "0"

print("f(x) = x**3 - 6x**2 + 9x sur [1 ; 3]")
x = 1
precedent = ""
while x <= 3.001:
    d2 = derivee_seconde(x)
    s = signe(d2)
    if abs(d2) < 0.001:
        d2 = 0
    if precedent == "-" and s == "+":
        print("x =", round(x, 2), " f'' =", round(d2, 3), " signe", s, " <-")
    else:
        print("x =", round(x, 2), " f'' =", round(d2, 3), " signe", s)
    if s != "0":
        precedent = s
    x = x + 0.5
```

Trace d'exécution

```
f(x) = x**3 - 6x**2 + 9x sur [1 ; 3]
x = 1 f'' = -6.0 signe -
x = 1.5 f'' = -3.0 signe -
x = 2.0 f'' = 0 signe 0
x = 2.5 f'' = 3.0 signe + <-
x = 3.0 f'' = 6.0 signe +
```

Interprétation mathématique. La dérivée seconde passe du négatif au positif en franchissant $x = 2$: c'est le point d'inflexion, confirmé par le calcul exact $f''(x) = 6(x-2)$. Les cinq valeurs lues, -6, -3, 0, 3 puis 6, sont exactement celles de $6x - 12$ aux points 1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 et 3. La ligne $x = 2$ affiche 0 et le signe 0 : la différence finie y vaut en réalité -7×10^{-9}, résidu d'arrondi que le test de tolérance de la fonction *signe* ramène à zéro. Le repère « changement de signe » n'apparaît donc qu'à la ligne suivante, $x = 2{,}5$, dès qu'un $+$ succède effectivement au dernier $-$ mémorisé.

Ce test de tolérance n'est pas un raffinement de programmeur : il traduit le fait qu'**une dérivée seconde nulle ne suffit pas** à conclure. Pour $g(x) = x^4$, g'' s'annule en 0 **sans changer de signe**, et il n'y a pourtant **aucun** point d'inflexion. Seul le changement de signe est concluant, exactement comme l'énonce l'avertissement du §5.

■ La différence finie n'est qu'une approximation. Elle est ici théoriquement exacte, puisque f est un polynôme de degré 3, et pourtant la machine renvoie $-5{,}999999999950$ au lieu de -6 en $x = 1$, et -7×10^{-9} au lieu de 0 en $x = 2$: diviser par $h^2 = 10^{-6}$ amplifie les erreurs d'arrondi. Comme au chapitre 2, **l'exploration numérique suggère, le calcul démontre**.

SYNTHÈSE

Les trois réflexes du chapitre

1. Dériver une composée fait toujours apparaître u' en facteur.
2. Un point d'inflexion exige un **changement de signe**, pas seulement une annulation.
3. Convexe $\neq$ croissante : f' gouverne les variations, f'' la convexité.

EXERCICES

SÉRIE A ★

EXERCICE 108 ★

Dériver $f(x) = (3x+1)^5$.

EXERCICE 109 ★

Dériver $f(x) = (x^2 - 4x)^3$.

EXERCICE 110 ★

Dériver $f(x) = \sqrt{2x+5}$ en précisant l'ensemble de dérivabilité.

EXERCICE 111 ★

Dériver $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

EXERCICE 112 ★

Calculer f' et f'' pour $f(x) = x^4 - 2x^3 + x$.

EXERCICE 113 ★

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = x^3 - 2x$ au point d'abscisse 2.

EXERCICE 114 ★

$f''(x) = 4x - 8$. Déterminer les intervalles de convexité et de concavité de f.

EXERCICE 115 ★

Dériver $f(x) = (2x+1)^3$ et $g(x) = e^{3x-1}$ sur $\mathbb{R}$.