Chapitre 5. Cours

Fonction logarithme népérien

Objectifs du chapitre — programme officiel (BO 2019)

Ce document contient. Cours complet : définitions, propriétés et démonstrations exigibles, fiches méthodes guidées, exemples résolus et synthèse du chapitre.

Extrait du manuel *Math Convergence — Terminale, spécialité mathématiques*
A. Choukoukou · session 2027 · reproduit avec l'autorisation de l'auteur.

CHAPITRE

5

FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Le logarithme fait descendre les exposants. C'est l'outil qui transforme une équation $q^n < \varepsilon$ en une inéquation du premier degré, et qui rend calculable tout ce que le chapitre 1 ne savait qu'encadrer.

Objectifs. Manipuler les propriétés algébriques du logarithme · résoudre équations et inéquations en maîtrisant les conditions d'existence · dériver $\ln u$ · exploiter la concavité et l'inégalité $\ln x \leqslant x - 1$ · lever une forme indéterminée par croissances comparées · déterminer un seuil par le calcul.

Compétences travaillées. Calculer (dominante) · Raisonner · Modéliser

Prérequis. Chapitre 2 : fonction exponentielle, propriétés algébriques, limites et croissances comparées · chapitre 4 : dérivée d'une composée, convexité · chapitre 1 : seuils.

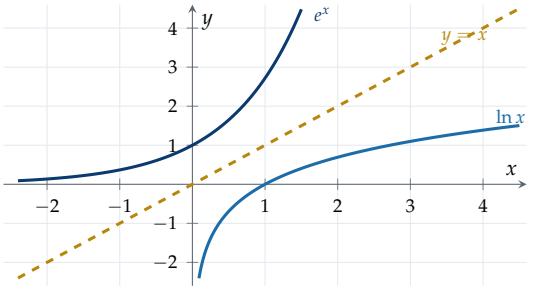
Diagnostic express.

1. Résoudre $e^x = 5$ — on donnera une valeur approchée.
2. Que vaut e^0 ?
3. Résoudre $x - 3 > 0$.
4. Dériver $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
5. Pourquoi l'équation $e^x = 0$ n'a-t-elle pas de solution ?

Corrigé en fin de chapitre.

COURS

1. Définition



5.1 — Exponentielle et logarithme, symétriques par rapport à $y = x$

Définition 5.1. La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est définie sur $]0\,;+\infty[$ comme la réciproque de la fonction exponentielle :

$$\text{pour } x > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}, \qquad \ln x = y \iff x = e^y$$

$\ln 1 = 0$ $\quad \ln e = 1$ $\quad e^{\ln x} = x$ **pour** $x > 0$ $\quad \ln(e^x) = x$ **pour tout** x

■ **Erreur à éviter.** $\ln x$ n'existe que pour $x > 0$. Avant toute résolution, écrivez l'**ensemble de définition** : c'est lui qui élimine les fausses solutions à la fin.

2. Propriétés algébriques

Théorème 5.2. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ et tout entier n :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

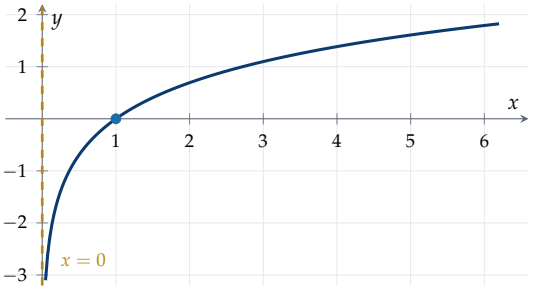
$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b \qquad \ln(a^n) = n \ln a \qquad \ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$$

Exemple d'application. $\ln 12 = \ln(4 \times 3) = 2\ln 2 + \ln 3$.

➤ **Bon réflexe.** Le logarithme **transforme les produits en sommes et les puissances en produits**. C'est exactement l'opération inverse de l'exponentielle, et c'est ce qui permet de faire descendre une inconnue d'un exposant.

■ **Erreur à éviter.** $\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$. Il n'existe **aucune** formule pour le logarithme d'une somme.

3. Variations et limites



5.2 — La fonction logarithme et son asymptote verticale

Théorème 5.3. ln est **strictement croissante** sur $]0\,;+\infty[$. Par conséquent, pour $a>0$ et $b>0$:

$$\ln a = \ln b \iff a = b \qquad \ln a < \ln b \iff a < b$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

L'axe des ordonnées est **asymptote verticale** à la courbe.

➤ **Astuce.** La stricte croissance autorise à « enlever les ln » d'une équation ou d'une inéquation — mais seulement après avoir vérifié que les deux membres sont strictement positifs.

4. Dérivée

Théorème 5.4. ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
Plus généralement, si u est dérivable et strictement positive sur I :

$$\big(\ln u\big)' = \frac{u'}{u}$$

Exemple d'application. Pour $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$: $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, du signe de x.

➤ **Bon réflexe.** $u>0$ étant exigé, le signe de $\big(\ln u\big)'$ est celui de u' seul. Étudier les variations de $\ln u$ revient donc à étudier celles de u.

5. Concavité et inégalité fondamentale

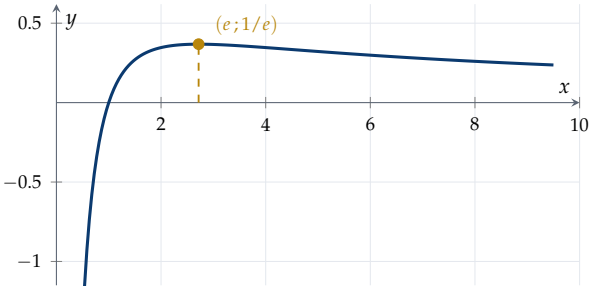
Théorème 5.5. $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$: la fonction ln est **concave** sur $]0\,;+\infty[$. Sa courbe est donc située sous chacune de ses tangentes.

Inégalité fondamentale. $\ln x \leqslant x-1$ **pour tout** $x>0$**, avec égalité si et seulement si** $x=1$**.**

C'est la tangente en 1, d'équation $y = x-1$, qui majore la courbe.

➤ **Astuce.** Cette inégalité est le passe-partout des majorations avec logarithme. En posant $x = 1+h$, elle s'écrit aussi $\ln(1+h) \leqslant h$.

6. Croissances comparées



5.3 — La fonction $\dfrac{\ln x}{x}$ et son maximum en $x = e$

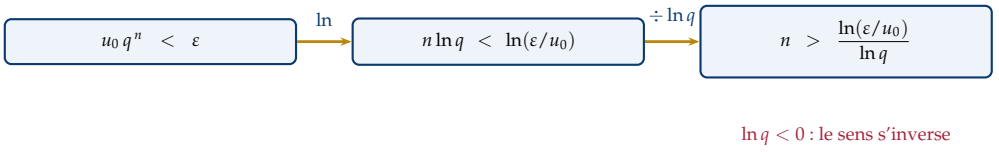
Théorème 5.6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et plus généralement, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$$

➤ **À retenir en une phrase. La puissance l'emporte toujours sur le logarithme.** En $+\infty$ elle domine au dénominateur ; en 0^+ elle écrase la divergence de ln.

■ **Erreur à éviter.** Conclure « $\dfrac{\infty}{\infty}$ donc 1 ». Une forme indéterminée n'a pas de valeur par défaut : c'est le théorème des croissances comparées qui tranche, et il faut le citer.

7. Application : résolution d'un seuil



5.4 — Résoudre un seuil : de l'algorithme au calcul

Le logarithme sert à faire descendre l'inconnue d'un exposant. Pour $q > 0$ et $q \neq 1$:

$$q^n > s \iff n \ln q > \ln s$$

puis on divise par $\ln q$, **en changeant le sens de l'inégalité si** $\ln q < 0$, c'est-à-dire si $0 < q < 1$.
Exemple d'application. $0{,}9^n < 0{,}01$ donne $n \ln 0{,}9 < \ln 0{,}01$, et comme $\ln 0{,}9 < 0$:

$$n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}9} \approx 43{,}7 \qquad \text{soit } n \geqslant 44.$$

■ **Erreur à éviter.** Oublier le changement de sens quand la raison est inférieure à 1. C'est l'erreur la plus coûteuse du chapitre : elle donne une réponse plausible mais fausse, et rien dans le résultat ne la signale.

MÉTHODES

Méthode 1 — Résoudre une équation logarithmique

1. Déterminer l'ensemble de définition : **tous** les arguments doivent être strictement positifs.
2. Ramener l'équation à la forme $\ln A = \ln B$ à l'aide des propriétés algébriques.
3. Utiliser la stricte croissance : $\ln A = \ln B \iff A = B$.
4. Résoudre, puis **écarter** les solutions hors de l'ensemble de définition.

Exemple éclair. $\ln x + \ln(x-2) = \ln 3$ sur $]2\,;+\infty[$ donne $x(x-2) = 3$, soit $x^2 - 2x - 3 = 0$ et $x \in \{-1\,;3\}$. Seul 3 convient.

■ **Erreur à éviter.** Résoudre sans avoir posé l'ensemble de définition. La solution -1 ci-dessus est irrecevable : sans l'étape 1, on la garde et on perd les points.

Méthode 2 — Résoudre une inéquation logarithmique

1. Ensemble de définition, comme précédemment.
2. Ramener à $\ln A < \ln B$.
3. La stricte croissance **conserve** le sens : $\ln A < \ln B \iff A < B$.
4. Intersecter l'ensemble des solutions avec l'ensemble de définition.

➤ **Bon réflexe.** Le logarithme étant croissant, aucun sens d'inégalité ne change ici. C'est à la **division par** $\ln q$ de la méthode 5 que le piège se trouve, pas à ce niveau.

Méthode 3 — Dériver et étudier $\ln u$

1. Vérifier $u > 0$ sur l'intervalle : c'est la condition d'existence.
2. Écrire $\big(\ln u\big)' = \dfrac{u'}{u}$.
3. Le dénominateur étant positif, le signe de la dérivée est celui de u'.
4. Dresser le tableau de variations et calculer les limites aux bornes.

➤ **Astuce.** $\ln u$ varie **comme** u. Si u admet un minimum en a, alors $\ln u$ aussi, et sa valeur est $\ln\big(u(a)\big)$: plus besoin de refaire l'étude.

Méthode 4 — Lever une indétermination par croissances comparées

1. Identifier la forme indéterminée : $\dfrac{\infty}{\infty}$ ou $0 \times \infty$.
2. Faire apparaître le quotient de référence $\dfrac{\ln x}{x^n}$ ou le produit $x \ln x$, en factorisant par le terme dominant.
3. Citer le théorème des croissances comparées.
4. Conclure par produit ou somme de limites.

Exemple éclair. $f(x) = x - \ln x = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$. Comme $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$, la parenthèse tend vers 1 et $f(x) \to +\infty$.

Méthode 5 — Déterminer un seuil par le calcul

1. Écrire l'inéquation sous la forme $q^n > s$ ou $q^n < s$.
2. Appliquer le logarithme aux deux membres, tous deux strictement positifs.
3. Descendre l'exposant : $n \ln q$.
4. Diviser par $\ln q$ en **changeant le sens** si $0 < q < 1$.
5. Conclure par le plus petit entier convenable, et **vérifier** sur n et $n-1$.

➤ **Bon réflexe.** La vérification finale sur deux entiers consécutifs coûte deux lignes et détecte à coup sûr une erreur de sens. Elle vaut souvent un demi-point à elle seule.

Méthode 6 — Démontrer une inégalité avec $\ln$

Quand. L'énoncé demande de comparer ln à une expression algébrique, ou de majorer un terme d'une suite.

1. Poser $g(x) =$ membre de droite $-$ membre de gauche.
2. Dériver et étudier le signe de g'.
3. Dresser le tableau de variations et identifier l'extremum.
4. Conclure : si le minimum de g est positif, l'inégalité est démontrée.

➤ **Astuce.** Avant de lancer l'étude, testez si l'**inégalité fondamentale** $\ln x \leqslant x - 1$ suffit. Elle règle une bonne moitié des cas en trois lignes, et sa démonstration par la concavité est elle-même une question de cours.

ERREURS FRÉQUENTES ET BONS RÉFLEXES

■ Erreur	✓ Bon réflexe
Écrire $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$	Le logarithme transforme les **produits**, pas les sommes
Oublier l'ensemble de définition	Chaque argument doit être **strictement** positif
Conserver une solution hors du domaine	Étape 4 de la méthode 1, sans exception
Ne pas inverser l'inégalité en divisant par $\ln q < 0$	Pour $0 < q < 1$, $\ln q$ est négatif
Écrire $\ln(x^2) = 2\ln x$ sans condition	Vrai si $x > 0$; sinon $\ln(x^2) = 2\ln\lvert x\rvert$
Confondre $\dfrac{\ln x}{x}$ et $\dfrac{x}{\ln x}$	Le premier tend vers 0, le second vers $+\infty$

MODULE PYTHON — SEUIL PAR LE CALCUL ET PAR ALGORITHME

```
# Seuil par algorithme et par le logarithme
from math import log, ceil

def seuil_par_boucle(u0, q, cible):
    u = u0
    n = 0
    while u >= cible:
        u = u * q
        n = n + 1
    return n

def seuil_par_logarithme(u0, q, cible):
    # q**n < cible/u0 donne n * ln(q) < ln(cible/u0)
    # on divise par ln(q) < 0, donc on inverse l'inegalite
    borne = log(cible / u0) / log(q)
    return ceil(borne)

liste_u0 = [1000, 5000, 1]
liste_q = [0.9, 0.85, 0.5]
liste_cible = [1, 10, 0.001]

for i in range(3):
    u0 = liste_u0[i]
    q = liste_q[i]
    cible = liste_cible[i]
    n1 = seuil_par_boucle(u0, q, cible)
    n2 = seuil_par_logarithme(u0, q, cible)
    print("u0 =", u0, " q =", q, " cible =", cible)
    print(" boucle :", n1, " logarithme :", n2, " accord :", n1 == n2)
```

Trace d'exécution

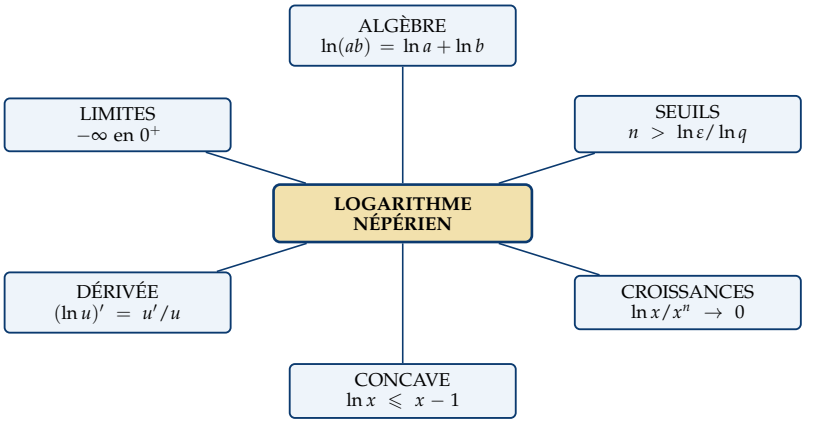
```
u0 = 1000 q = 0.9 cible = 1
boucle : 66 logarithme : 66 accord : True
u0 = 5000 q = 0.85 cible = 10
boucle : 39 logarithme : 39 accord : True
u0 = 1 q = 0.5 cible = 0.001
boucle : 10 logarithme : 10 accord : True
```

Interprétation mathématique. Les deux méthodes concordent sur les trois cas. La première réponse — 66 — est exactement celle obtenue par l'algorithme du chapitre 1, mais elle est ici **calculée** et non plus **cherchée**.

Dans le premier cas, la variable *borne* calculée par *seuil_par_logarithme* vaut 65,5630 : c'est le seuil réel, non entier. Le plus petit entier qui le dépasse est 66, d'où l'emploi de *ceil*. La colonne « accord » affiche *True* sur les trois lignes : boucle et logarithme donnent le même rang.

■ **Un cas limite à connaître.** Si la borne tombe exactement sur un entier, *ceil* renvoie cet entier, alors que l'inégalité stricte exige l'entier suivant. Pour $q = 0,5$, $u_0 = 1$, $cible = 0,25$, la borne vaut exactement 2 et il faut $n = 3$ puisque $0,5^2 = 0,25$ n'est pas strictement inférieur à $0,25$. **Vérifier toujours l'entier trouvé et son prédécesseur**, comme l'impose l'étape 5 de la méthode 5 du présent chapitre.

SYNTHÈSE



5.5 — Synthèse du chapitre 5

Les trois réflexes du chapitre

1. Ensemble de définition d'abord, résolution ensuite, vérification enfin.
2. ln transforme les produits en sommes — jamais les sommes.
3. Diviser par $\ln q$ avec $0 < q < 1$ inverse l'inégalité.