Chapitre 6. Cours

Fonctions sinus et cosinus

Objectifs du chapitre — programme officiel (BO 2019)

Ce document contient. Cours complet : définitions, propriétés et démonstrations exigibles, fiches méthodes guidées, exemples résolus et synthèse du chapitre.

Extrait du manuel *Math Convergence — Terminale, spécialité mathématiques*
A. Choukoukou · session 2027 · reproduit avec l'autorisation de l'auteur.

CHAPITRE

6

FONCTIONS SINUS ET COSINUS

Deux fonctions qui ne vont nulle part : elles n'ont pas de limite en l'infini, elles reviennent indéfiniment aux mêmes valeurs. Cette absence de limite, loin d'être une faiblesse, est exactement ce qui les rend capables de modéliser tout ce qui se répète.

Objectifs. Exploiter parité et périodicité · dériver $\sin u$ et $\cos u$ · établir et utiliser $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ · résoudre une équation trigonométrique sur un intervalle donné · étudier une fonction trigonométrique sur une période · encadrer à l'aide du caractère borné.

Compétences travaillées. Représenter (dominante) · Calculer · Raisonner

Prérequis. Trigonométrie de Première : cercle trigonométrique, radians, valeurs remarquables, relation $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ · chapitre 4 : dérivée d'une composée, convexité · chapitre 2 : théorèmes de comparaison.

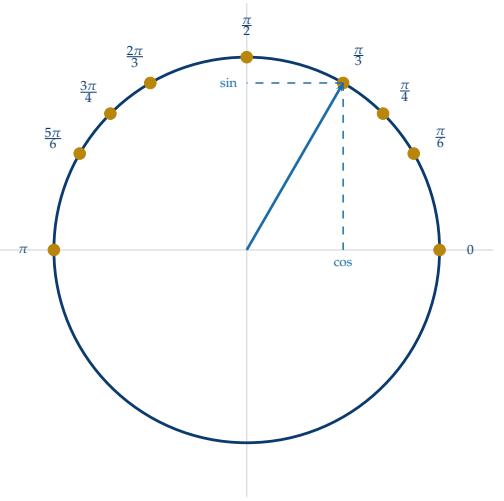
Diagnostic express.

1. Convertir 60 en radians.
2. Donner $\cos(\dfrac{\pi}{3})$ et $\sin(\dfrac{\pi}{3})$.
3. Que vaut $\cos^2 x+\sin^2 x$?
4. Résoudre $\cos x=1$ sur $[0\,;2\pi]$.
5. Encadrer $3+2\sin x$ pour tout réel x.

Corrigé en fin de chapitre.

COURS

1. Rappels de Première



6.1 — Le cercle trigonométrique et les valeurs remarquables

Cercle trigonométrique. À tout réel x correspond un unique point M du cercle de rayon 1, repéré par l'angle x en radians. Alors $\cos x$ est l'abscisse de M et $\sin x$ son ordonnée.

Valeurs à connaître.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Identité fondamentale. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ **pour tout réel x.**

➤ **Astuce mnémotechnique.** Les sinus des angles remarquables s'écrivent $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$ pour $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. Les cosinus se lisent dans l'autre sens.

2. Parité et périodicité

Théorème 6.1. Pour tout réel x :

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

cos **est paire,** sin **est impaire, et toutes deux sont** 2π**-périodiques.**

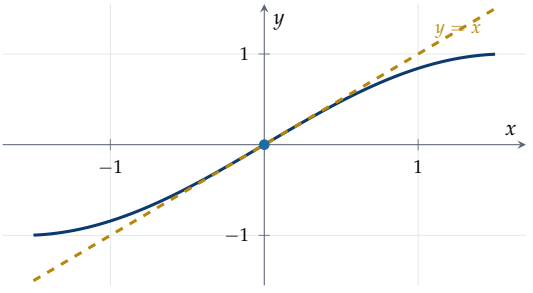
➤ **Bon réflexe.** Périodicité et parité permettent de ramener toute étude à l'intervalle $[0\,;\,\pi]$, puis d'obtenir le reste par symétrie. C'est un gain de temps considérable, et un point de rédaction.

3. Absence de limite en l'infini

■ **À retenir.** $\cos x$ et $\sin x$ **n'ont pas de limite** en $+\infty$ ni en $-\infty$: elles oscillent indéfiniment entre -1 et 1 sans se stabiliser. Écrire « $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ » est une faute.

➤ **Ce qui reste vrai.** Elles sont **bornées** : $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. C'est cette propriété, et non une limite, qui permet de conclure par encadrement.

4. Limites usuelles en 0



6.2 — Près de 0, $\sin x \approx x$

Théorème 6.2. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$

Ces deux limites sont les nombres dérivés de sin et de cos en 0.

Exemple d'application. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(5x)}{x} = \lim_{x\to0} 5 \times \frac{\sin(5x)}{5x} = 5.$

➤ **Astuce.** Faites toujours apparaître le **même** argument au numérateur et au dénominateur, quitte à multiplier et diviser par le coefficient. Sans cela, la limite de référence ne s'applique pas.

5. Dérivées

Théorème 6.3. sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et

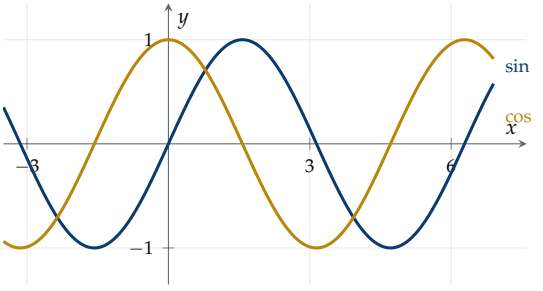
$$\sin'(x) = \cos x \qquad \cos'(x) = -\sin x$$

Pour u dérivable : $\big(\sin u\big)' = u' \cos u \qquad \big(\cos u\big)' = -u' \sin u.$

Exemple d'application. Pour $f(x) = \sin(3x)$: $f'(x) = 3\cos(3x)$.

■ **Erreur à éviter.** Le signe moins est sur la dérivée du **cosinus**, pas du sinus. Une dérivation sur deux se perd là.

6. Étude sur une période



6.3 — Les fonctions sinus et cosinus sur une période

Sur $[0\,;\,\pi]$, cos est strictement décroissante de 1 à -1.
Sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, sin est strictement croissante de -1 à 1.

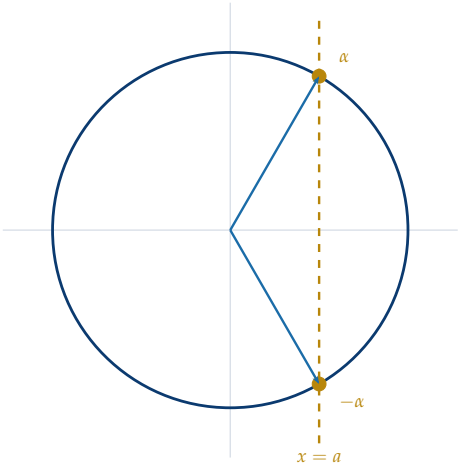
Étude d'une fonction trigonométrique.
1. Déterminer une période, et réduire l'intervalle d'étude.
2. Chercher une parité pour le réduire encore.
3. Dériver et résoudre $f'(x) = 0$ **sur l'intervalle réduit**.
4. Dresser le tableau, puis compléter par symétrie et périodicité.

7. Convexité

$\sin''(x) = -\sin x$: la fonction sin est concave sur $[0\,;\,\pi]$ et convexe sur $[\pi\,;\,2\pi]$. Les points d'abscisses 0, π, 2π sont des points d'inflexion.

➤ **Astuce.** La dérivée seconde de sin est $-\sin$: le signe de la concavité se lit directement sur la courbe elle-même, sans nouveau calcul.

8. Équations trigonométriques



6.4 — Résoudre $\cos x = a$: deux familles

Théorème 6.4. Pour a réel :

$$\cos x = \cos a \iff x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Exemple d'application. $\cos x = \dfrac{1}{2}$ sur $[0\,;2\pi]$: comme $\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$, les solutions sont $\dfrac{\pi}{3}$ et $2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$.

■ **Erreur à éviter.** Ne donner qu'**une** solution. Chaque équation en fournit deux familles ; sur un intervalle borné, il faut ensuite **sélectionner** les valeurs de k qui conviennent, et les lister toutes.

➤ **Bon réflexe.** Le cercle trigonométrique tranche instantanément : placez la valeur cherchée en abscisse pour un cosinus, en ordonnée pour un sinus, et lisez les points d'intersection. Deux en général, un seul aux extrémités.

MÉTHODES

Méthode 1 — Résoudre une équation trigonométrique sur un intervalle

1. Ramener l'équation à la forme $\cos x = \cos a$ ou $\sin x = \sin a$, en identifiant a parmi les angles remarquables.
2. Écrire les **deux** familles de solutions avec le paramètre $k \in \mathbb{Z}$.
3. Sélectionner les valeurs de k donnant une solution dans l'intervalle demandé.
4. Lister les solutions et les placer sur le cercle pour vérifier.

Exemple éclair. $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0\,;\,2\pi]$: $a = \dfrac{\pi}{4}$, d'où $x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$.

■ **Erreur à éviter.** Oublier la seconde famille. Pour un sinus c'est $\pi - a$, pour un cosinus c'est $-a$: les deux ne se ressemblent pas, ne les confondez pas.

Méthode 2 — Dériver $\sin u$ et $\cos u$

1. Identifier la fonction intérieure u et calculer u'.
2. Appliquer $\big(\sin u\big)' = u' \cos u$ ou $\big(\cos u\big)' = -u' \sin u$.
3. Ne pas oublier le facteur u', ni le signe moins pour le cosinus.
4. Simplifier si un facteur commun apparaît.

➤ **Bon réflexe.** Pour $\sin(\omega x)$, la dérivée est $\omega \cos(\omega x)$: la pulsation **sort** en facteur. C'est ce qui explique que les oscillations rapides aient de grandes pentes.

Méthode 3 — Étudier une fonction trigonométrique

1. Déterminer une période T et se ramener à un intervalle de longueur T.
2. Chercher une parité pour diviser encore l'intervalle par deux.
3. Dériver, résoudre $f'(x) = 0$ sur l'intervalle réduit.
4. Dresser le tableau, calculer les valeurs remarquables.
5. Étendre par symétrie puis par périodicité, en le **disant**.

➤ **Astuce.** Justifier la réduction de l'intervalle vaut autant de points que l'étude elle-même. Écrivez explicitement : « f étant 2π-périodique et paire, on l'étudie sur $[0\,;\,\pi]$ ».

Méthode 4 — Utiliser $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

1. Repérer la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.
2. Faire apparaître le **même** argument au numérateur et au dénominateur.
3. Multiplier et diviser par le coefficient manquant.
4. Appliquer la limite de référence et conclure par produit.

Exemple éclair. $\dfrac{\sin(3x)}{5x} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{\sin(3x)}{3x} \longrightarrow \dfrac{3}{5}$.

Méthode 5 — Conclure par le caractère borné

Quand. Une expression contient sin ou cos dont l'argument tend vers l'infini : aucune limite n'existe pour ce facteur, mais l'ensemble peut converger.

1. Encadrer le facteur trigonométrique : $-1 \leqslant \sin(\dots) \leqslant 1$.
2. Multiplier l'encadrement par le facteur restant, en **surveillant son signe**.
3. Vérifier que les deux bornes ont la même limite.
4. Conclure par le théorème des gendarmes.

Exemple éclair. $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$, donc $\dfrac{\sin x}{x} \to 0$ en $+\infty$ — à ne pas confondre avec la limite en 0, qui vaut 1.

■ **Erreur à éviter.** Multiplier un encadrement par une quantité **négative** sans inverser les inégalités. Si le facteur change de signe, traitez les deux cas séparément.

Méthode 6 — Résoudre une inéquation trigonométrique

Quand. L'énoncé demande le signe d'une expression, ou les intervalles où une courbe est au-dessus d'une droite.

1. Résoudre d'abord l'**équation** associée : elle donne les bornes.
2. Placer ces bornes sur le cercle trigonométrique.
3. Lire directement sur le cercle l'arc où l'inégalité est satisfaite.
4. Traduire cet arc en intervalle, puis en réunion d'intervalles sur l'intervalle demandé.

➤ **Astuce.** Un tableau de signes est inutile ici : le cercle donne la réponse en une lecture. Pour $\cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$ sur $[0\,;\,2\pi]$, les points d'abscisse au moins $\dfrac{1}{2}$ forment l'arc allant de 0 à $\dfrac{\pi}{3}$ et de $\dfrac{5\pi}{3}$ à 2π.

ERREURS FRÉQUENTES ET BONS RÉFLEXES

■ Erreur	✓ Bon réflexe
Écrire $(\cos x)' = \sin x$	Le signe est $-$: en 0 le cosinus est maximal et décroît ensuite
Ne donner qu'une famille de solutions	La propriété 6.4 en fournit deux
Chercher $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$	Elle n'existe pas — exercice 71
Écrire $\sin(a+b) = \sin a + \sin b$	Faux ; il existe une formule d'addition, à ne pas confondre
Résoudre en degrés	Les fonctions du programme travaillent en **radians**
Oublier u' dans $(\sin u)'$	Même vigilance qu'aux chapitres 4, 7 et 8

MODULE PYTHON — PÉRIODICITÉ ET APPROXIMATION DES PETITS ANGLES

```
# Periodicite et approximation des petits angles
from math import sin, pi

print("Periodicite : sin(x) et sin(x + 2*pi)")
liste_x = [0.5, 1, 2, 3]
for i in range(len(liste_x)):
    x = liste_x[i]
    print("x =", x, " sin(x) =", round(sin(x), 10))
    print(" sin(x + 2pi) =", round(sin(x + 2 * pi), 10))

print()
print("Approximation des petits angles : sin(x) proche de x")
liste_x = [1, 0.5, 0.1]
for i in range(len(liste_x)):
    x = liste_x[i]
    ecart = abs(x - sin(x))
    print("x =", x, " sin(x) =", round(sin(x), 10))
    rapport = sin(x) / x
    print(" ecart =", round(ecart, 10), " sin(x)/x =", round(rapport, 10))
```

Trace d'exécution

```
Periodicite : sin(x) et sin(x + 2*pi)
x = 0.5 sin(x) = 0.4794255386
    sin(x + 2pi) = 0.4794255386
x = 1 sin(x) = 0.8414709848
    sin(x + 2pi) = 0.8414709848
x = 2 sin(x) = 0.9092974268
    sin(x + 2pi) = 0.9092974268
x = 3 sin(x) = 0.1411200081
    sin(x + 2pi) = 0.1411200081

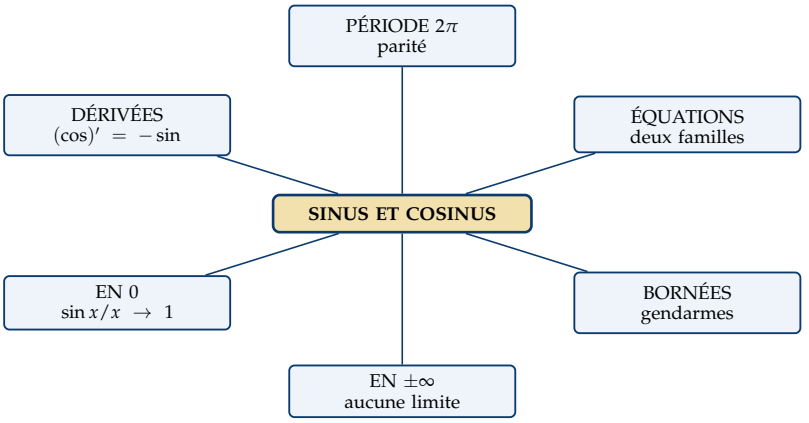
Approximation des petits angles : sin(x) proche de x
x = 1 sin(x) = 0.8414709848
    ecart = 0.1585290152 sin(x)/x = 0.8414709848
x = 0.5 sin(x) = 0.4794255386
    ecart = 0.0205744614 sin(x)/x = 0.9588510772
x = 0.1 sin(x) = 0.0998334166
    ecart = 0.0001665834 sin(x)/x = 0.9983341665
```

Interprétation mathématique. La première trace vérifie la propriété 6.1 sur quatre valeurs : les deux colonnes coïncident sur les dix décimales affichées.

La seconde illustre le théorème 6.2 : la colonne des rapports monte vers 1, de $0,8415$ à $0,9983$ lorsque x passe de 1 à $0,1$. Mieux, l'écart $|x - \sin x|$ tombe de $0,1585$ à $0,000167$ sur ce même passage, soit une division par près de mille quand x est divisé par dix — comportement en x^3, cohérent avec le fait que $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$ près de 0.

■ Les deux colonnes de la première trace coïncident à dix décimales, mais **pas bit à bit** : pour $x = 0,5$, la machine donne un écart de $-2,2 \times 10^{-16}$ entre $\sin(x + 2\pi)$ et $\sin(x)$, car 2π n'est pas représentable exactement en flottant. **Le calcul numérique n'est pas exact ;** il illustre, il ne démontre pas.

SYNTHÈSE



6.5 — Synthèse du chapitre 6

Les trois réflexes du chapitre

1. $(\cos x)' = -\sin x$: le signe moins ne s'oublie pas.
2. Une équation trigonométrique a **deux** familles de solutions.
3. Pas de limite à l'infini, mais bornées : on encadre.

EXERCICES

SÉRIE A ★

EXERCICE 181 ★

Simplifier. a. $\cos(x+4\pi)$ · b. $\sin(-x)$ · c. $\cos(-x)+\sin(x+2\pi)$

EXERCICE 182 ★

Dériver. a. $f(x)=\sin(2x)$ · b. $g(x)=\cos(3x+1)$ · c. $h(x)=\sin(-x)$

EXERCICE 183 ★

Résoudre $\cos x = \dfrac{1}{2}$ sur $[0\,;2\pi]$.

EXERCICE 184 ★

Résoudre $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0\,;2\pi]$.