Chapitre 6. Exercices corrigés

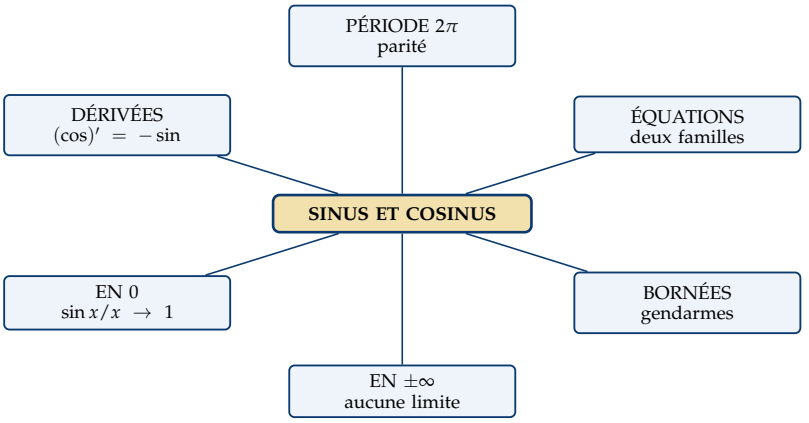
Fonctions sinus et cosinus

Objectifs du chapitre — programme officiel (BO 2019)

Ce document contient. Séries d'exercices progressives, entièrement corrigées, des automatismes aux exercices de type bac.

Extrait du manuel *Math Convergence — Terminale, spécialité mathématiques*
A. Choukoukou · session 2027 · reproduit avec l'autorisation de l'auteur.

SYNTHÈSE



6.5 — Synthèse du chapitre 6

Les trois réflexes du chapitre

1. $(\cos x)' = -\sin x$: le signe moins ne s'oublie pas.
2. Une équation trigonométrique a **deux** familles de solutions.
3. Pas de limite à l'infini, mais bornées : on encadre.

EXERCICES

SÉRIE A ★

EXERCICE 181 ★

Simplifier. a. $\cos(x+4\pi)$ · b. $\sin(-x)$ · c. $\cos(-x)+\sin(x+2\pi)$

EXERCICE 182 ★

Dériver. a. $f(x)=\sin(2x)$ · b. $g(x)=\cos(3x+1)$ · c. $h(x)=\sin(-x)$

EXERCICE 183 ★

Résoudre $\cos x = \dfrac{1}{2}$ sur $[0\,;2\pi]$.

EXERCICE 184 ★

Résoudre $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0\,;2\pi]$.

EXERCICE 185 ★

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$, en justifiant.

EXERCICE 186 ★

Donner les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{3}$, $\sin\dfrac{\pi}{4}$, $\cos\pi$ et $\sin\dfrac{3\pi}{2}$.

EXERCICE 187 ★

Résoudre $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0\,;\,2\pi]$.

EXERCICE 188 ★

Résoudre $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0\,;\,2\pi]$.

EXERCICE 189 ★

Dériver $f(x) = \sin(3x)$ et $g(x) = \cos(2x+1)$ sur $\mathbb{R}$.

SÉRIE B ★★

EXERCICE 190 ★★

Dériver. a. $f(x) = \cos(x^2)$ · b. $g(x) = \sin(\dfrac{1}{x})$ sur $]0\,;+\infty[$ · c. $h(x) = x\sin x$

EXERCICE 191 ★★

Soit $f(x) = \sin x + \cos x$ sur $[0\,;\,2\pi]$.
a. Calculer $f'(x)$.
b. Résoudre $f'(x) = 0$ sur $[0\,;\,2\pi]$.
c. Dresser le tableau de variations de f.

EXERCICE 192 ★★

Déterminer. a. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$ · b. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{2x}$ · c. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$

EXERCICE 193 ★★

Résoudre $\cos(2x) = \dfrac{1}{2}$ sur $[0\,;\,2\pi]$.

EXERCICE 194 ★★

Soit $f(x) = \sin^2 x$. Démontrer que $f'(x) = \sin(2x)$.

EXERCICE 195 ★★

Résoudre $2\cos x + 1 = 0$ sur $[0\,;\,2\pi]$.

EXERCICE 196 ★★

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{x}$.

EXERCICE 197 ★★

Soit $f(x) = \sin x \cos x$. Démontrer que f est impaire et π-périodique.

SÉRIE C ★★★

EXERCICE 198 ★★★

Soit $f(x) = \sin x + \cos x$ sur $[0\,;\,2\pi]$.
a. Reprendre le tableau de variations de l'exercice 191 et donner les extrema exacts.
b. Calculer $f''(x)$ et étudier la convexité de f sur $[0\,;\,2\pi]$.
c. Déterminer les points d'inflexion.

EXERCICE 199 ★★★

Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.
On pourra utiliser $1 - \cos x = 2\sin^2(\dfrac{x}{2})$.

EXERCICE 200 ★★★

Soit $f(x) = \cos(x^2)$ sur $[0\,;\,\sqrt{\pi}]$.
a. Calculer $f'(x)$.
b. Étudier le signe de f' sur $[0\,;\,\sqrt{\pi}]$ et dresser le tableau de variations.

EXERCICE 201 ★★★

Résoudre $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ sur $[0\,;\,2\pi]$.
On pourra poser $X = \cos x$.

EXERCICE 202 ★★★

Soit $f(x) = e^{-x}\sin x$ sur $[0\,;\,+\infty[$, modélisant une oscillation amortie.
a. Calculer $f'(x)$ et le factoriser.
b. Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$, $-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$.
c. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

EXERCICE 203 ★★★

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{5x}$.

EXERCICE 204 ★★★

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$.

EXERCICE 205 ★★★

Résoudre $\sin(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0\,;\,\pi]$.

EXERCICE 206 ★★★

Résoudre l'inéquation $\cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$ sur $[0\,;\,2\pi]$.

EXERCICE 207 ★★★

Soit $f(x) = 2\sin x - x$ sur $[0\,;\,2\pi]$.
a. Calculer $f'(x)$ et résoudre $f'(x) = 0$.
b. Dresser le tableau de variations de f.

SÉRIE D ★★★★

EXERCICE 208 ★★★★

La hauteur d'eau, en mètres, dans un port est modélisée par $h(t) = 5 + 2\sin(\pi\dfrac{t}{6})$, où t est le temps en heures depuis minuit, $t \in [0\,;\,24]$.
a. Déterminer la période de h et interpréter.
b. Déterminer les hauteurs maximale et minimale, et les instants où elles sont atteintes.
c. Un navire ne peut entrer que si la hauteur dépasse 6 m. Déterminer les plages horaires d'accès sur $[0\,;\,12]$.

EXERCICE 209 ★★★★

Soit $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$, prolongée par $f(0) = 1$.
a. Justifier que f est continue en 0.
b. Démontrer que f est paire.
c. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
d. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$ et démontrer que $f'(x)$ s'annule si et seulement si $\tan x = x$.

EXERCICE 210 ★★★★

a. Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\sin x \leqslant x$.
b. En déduire que pour tout $x \geqslant 0$, $\cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$. *On pourra étudier* $g(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

EXERCICE 211 ★★★★

a. Étudier les variations de $g(x) = x - \sin x$ sur $[0\,;+\infty[$.
b. En déduire que $\sin x \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$.
c. En utilisant l'imparité, démontrer que $|\sin x| \leqslant |x|$ pour tout réel x.

EXERCICE 212 ★★★★

Résoudre $\sin(2x) = \sin x$ sur $[0\,;2\pi]$.

SÉRIE E ★★★★★

EXERCICE 213 ★★★★★

En reprenant la démarche de l'exercice 210, démontrer que pour tout $x \geqslant 0$:

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$$

Appliquer à $x = 0,1$ et comparer à la valeur $\sin(0,1) \approx 0,0998334$.

EXERCICE 214 ★★★★★

Soit $f(x) = x + \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$.
a. Calculer $f'(x)$ et démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
b. Démontrer que $x - 1 \leqslant f(x) \leqslant x + 1$, puis déterminer les limites de f en $\pm\infty$.
c. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, et la déterminer.

EXERCICE 215 ★★★★★

Soit $f(x) = \sin x$ sur $[0\,;2\pi]$.
a. Calculer $f''(x)$ et étudier son signe.
b. En déduire les intervalles de convexité et de concavité de f, puis ses points d'inflexion.
c. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
d. En déduire la position de la courbe par rapport à cette tangente sur $[0\,;\pi]$.

EXERCICE 216 ★★★★★

On souhaite démontrer que pour tout $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

a. Justifier que sin est concave sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
b. En déduire la majoration $\sin x \leqslant x$.
c. Déterminer l'équation de la corde joignant les points d'abscisses 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, puis en déduire la minoration.
d. Vérifier l'encadrement pour $x = \dfrac{\pi}{6}$.