Chapitre 7. Cours

Primitives et équations différentielles

Objectifs du chapitre — programme officiel (BO 2019)

Ce document contient. Cours complet : définitions, propriétés et démonstrations exigibles, fiches méthodes guidées, exemples résolus et synthèse du chapitre.

Extrait du manuel *Math Convergence — Terminale, spécialité mathématiques*
A. Choukoukou · session 2027 · reproduit avec l'autorisation de l'auteur.

CHAPITRE

7

PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Jusqu'ici on partait d'une fonction pour trouver sa dérivée. On fait maintenant le chemin inverse — et ce chemin inverse est celui qu'empruntent toutes les sciences, car les lois physiques décrivent des vitesses de variation, jamais des états.

Objectifs. Déterminer une primitive d'une fonction usuelle ou de la forme $u'f(u)$ · déterminer la primitive vérifiant une condition initiale · résoudre $y' = ay$, $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$ (solution particulière fournie) · modéliser une situation par une équation différentielle.

Compétences travaillées. Calculer (dominante) · Modéliser · Raisonner

Prérequis. Toutes les formules de dérivation des chapitres 4 et 5 · chapitre 2 : exponentielle, $(e^u)' = u'e^u$ · chapitre 5 : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Diagnostic express.

1. Dériver $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$.
2. Dériver $F(x) = \ln(x^2 + 1)$.
3. Dériver $F(x) = e^{2x}$.
4. Deux fonctions ayant la même dérivée sont-elles égales ?
5. Résoudre $2C - 5 = 3$.

Corrigé en fin de chapitre.

COURS

1. Notion de primitive

Définition 7.1. F est une **primitive** de f sur un intervalle I lorsque F est dérivable sur I et $F' = f$.

Théorème 7.2 (existence). Toute fonction **continue** sur un intervalle I y admet des primitives.

Théorème 7.3 (unicité à une constante près). Si F est une primitive de f sur I, les primitives de f sur I sont exactement les fonctions $x \mapsto F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
Il existe une **unique** primitive prenant une valeur donnée en un point donné.

Exemple d'application. Les primitives de $f(x) = 2x$ sur $\mathbb{R}$ sont $F(x) = x^2 + C$. Celle qui vérifie $F(1) = 5$ est obtenue par $1 + C = 5$, soit $C = 4$: $F(x) = x^2 + 4$.

➤ **Bon réflexe.** Une primitive se vérifie **toujours** en dérivant. C'est la seule opération du programme dont le contrôle est immédiat et gratuit : ne vous en privez jamais.

2. Primitives des fonctions usuelles

$f(x) = k$	$F(x) = kx$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln \lvert x \rvert$
$f(x) = x^n$, $n \neq -1$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x}$	$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$

■ **Erreur à éviter.** La primitive de sin est $-\cos$, avec le signe moins. C'est l'inverse de la dérivation, et c'est le signe le plus souvent perdu du chapitre.

3. Primitives de formes composées

$u'u^n$ $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$\dfrac{u'}{u}$ $\ln u$	$u'e^u$ e^u	$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ $2\sqrt{u}$	$u'\cos u$ $\sin u$

chercher u dont la dérivée figure en facteur

7.1 — Reconnaître une forme $u'f(u)$

$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$u'e^u$	e^u
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'\cos u$	$\sin u$	$u'\sin u$	$-\cos u$

Exemple d'application. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2+1 > 0$: $F(x) = \ln(x^2+1)$.

➤ **Astuce.** Un facteur constant manquant se rattrape : $x\,e^{x^2} = \dfrac{1}{2} \times 2x\,e^{x^2}$ a pour primitive $\dfrac{1}{2}e^{x^2}$. Un facteur **variable** manquant, lui, interdit la méthode.

4. Équation différentielle $y' = ay$

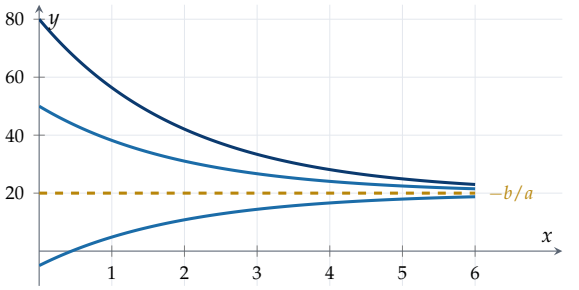
Théorème 7.4. Soit a un réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions

$$x \mapsto C\,e^{ax}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Pour toute condition initiale $y(x_0) = y_0$, la solution est **unique**.

➤ **Lecture.** $a > 0$ donne une croissance exponentielle, $a < 0$ une décroissance vers zéro. Le signe de a se lit sur le phénomène avant tout calcul.

5. Équation différentielle $y' = ay + b$



7.2 — Solutions de $y' = ay + b$ et état d'équilibre

Théorème 7.5. Soient $a \neq 0$ et b réels. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay + b$ sont les fonctions

$$x \mapsto C\,e^{ax} - \frac{b}{a}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Solution constante. $y = -\dfrac{b}{a}$ est solution : c'est l'état d'équilibre. Toutes les autres solutions s'en écartent ou s'en approchent selon le signe de a.

Exemple d'application. $y' = -0{,}5y + 10$ avec $y(0) = 4$. L'équilibre vaut $-\dfrac{10}{-0{,}5} = 20$, donc $y(x) = C\,e^{-0{,}5x} + 20$. La condition initiale donne $C + 20 = 4$, soit $C = -16$:

$$y(x) = -16\,e^{-0{,}5x} + 20$$

➤ **Bon réflexe.** Cherchez l'équilibre **en premier** : il donne la constante additive et permet de contrôler la limite. Ici $a < 0$, donc $y(x) \to 20$: la solution rejoint l'équilibre.

■ **Erreur à éviter.** Déterminer C **avant** d'avoir écrit la forme générale complète. La constante initiale ne s'ajuste qu'une fois le terme $-\dfrac{b}{a}$ en place, sinon elle absorbe une erreur invisible.

6. Équation différentielle $y' = ay + f$

Théorème 7.6 (second membre variable). Soient $a \neq 0$ un réel et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si g est une solution **particulière** de l'équation $(E) : y' = ay + f$, alors les solutions de (E) sont exactement les fonctions

$$x \longmapsto g(x) + C\,e^{ax}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

➤ **Ce que dit le programme.** La solution particulière g n'est jamais à deviner : l'énoncé **fournit** une fonction g et demande de *vérifier* qu'elle est solution. Le théorème donne ensuite toutes les solutions : g plus les solutions $C\,e^{ax}$ de l'équation homogène $y' = ay$.

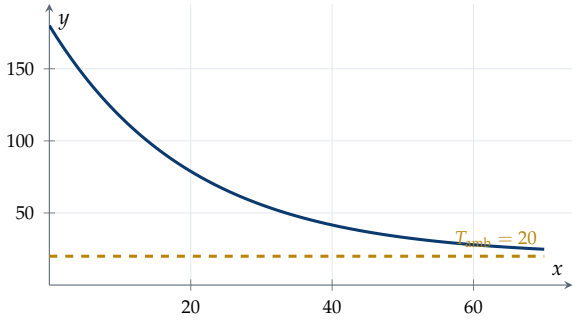
Exemple d'application. Considérons $(E) : y' = 2y + e^{-x}$ et $g(x) = -\dfrac{1}{3}\,e^{-x}$.

Vérification : $g'(x) = \dfrac{1}{3}\,e^{-x}$ et $2g(x) + e^{-x} = -\dfrac{2}{3}\,e^{-x} + e^{-x} = \dfrac{1}{3}\,e^{-x} = g'(x)$: g est bien solution de (E).

Conclusion : les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto C\,e^{2x} - \dfrac{1}{3}\,e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.

■ La formule $C\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ du théorème 7.5 suppose un second membre **constant**. Dès que le second membre dépend de x, elle ne s'applique plus : il faut passer par la solution particulière fournie.

7. Modélisation



7.3 — Refroidissement : convergence vers l'ambiante

Un phénomène dont la **vitesse de variation** est proportionnelle à l'écart avec une valeur limite se traduit par $y' = ay + b$. C'est le cas du refroidissement d'un corps, de la charge d'un condensateur, d'une population limitée par ses ressources, ou d'une cuve alimentée et vidangée simultanément.

1. Nommer la grandeur et sa variable — souvent le temps t.
2. Traduire l'énoncé en une relation entre y' et y.
3. Identifier a et b, puis la condition initiale.
4. Résoudre, puis **revenir au contexte** : limite, seuil, interprétation.

➤ **Astuce de lecture.** « Diminue de 4 % par unité de temps » donne le terme $-0{,}04\,y$; « on ajoute 12 unités » donne le terme constant $+12$. Les pourcentages portent sur y, les apports fixes sont autonomes.

MÉTHODES

Méthode 1 — Déterminer une primitive usuelle

1. Vérifier la continuité de f et **préciser l'intervalle**.
2. Décomposer f en somme de termes du tableau.
3. Primitiver terme à terme, en conservant les coefficients.
4. Dériver pour vérifier.

Exemple éclair. $f(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$ a pour primitives $F(x) = x^3 + \dfrac{1}{x} + C$.

■ **Erreur à éviter.** Omettre l'intervalle. $\dfrac{1}{x}$ admet $\ln|x|$ pour primitive, mais sur $]-\infty\,;0[$ **ou** sur $]0\,;+\infty[$, jamais sur les deux à la fois.

Méthode 2 — Reconnaître une forme $u'f(u)$

1. Repérer un candidat u : ce qui est sous une puissance, une racine, un logarithme ou une exponentielle.
2. Calculer u' et le chercher en facteur.
3. Ajuster par une constante si nécessaire.
4. Appliquer le tableau des formes composées, puis dériver pour vérifier.

➤ **Bon réflexe.** Le dénominateur est presque toujours le bon candidat pour u. Dérivez-le : si le numérateur lui ressemble à une constante près, la forme est $\dfrac{u'}{u}$.

Méthode 3 — Déterminer la primitive vérifiant une condition

1. Déterminer la forme générale $F(x) + C$.
2. Écrire la condition, par exemple $F(x_0) + C = y_0$.
3. Résoudre en C.
4. Réécrire la primitive **complète**, puis vérifier la condition.

■ **Erreur à éviter.** Répondre en laissant C. La question demande **une** fonction, pas une famille : la réponse est une expression sans constante libre.

Méthode 4 — Résoudre $y' = ay + b$ avec condition initiale

1. Identifier a et b en mettant l'équation sous la forme canonique.
2. Calculer l'état d'équilibre $-\dfrac{b}{a}$.
3. Écrire la forme générale $y(x) = C\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$.
4. Déterminer C par la condition initiale.
5. Contrôler : la limite doit valoir l'équilibre si $a < 0$.

Exemple éclair. $y' = 2y - 6$ avec $y(0) = 1$: l'équilibre vaut 3, donc $y(x) = C\,e^{2x} + 3$ et $C = -2$. Ici $a > 0$: la solution s'éloigne de l'équilibre.

Méthode 5 — Modéliser par une équation différentielle

1. Nommer la grandeur $y(t)$ et préciser son unité.
2. Traduire chaque phrase de l'énoncé en un terme : proportionnalité $\to ay$; apport ou perte fixe $\to b$.
3. Écrire la condition initiale, qui fait partie du modèle.
4. Résoudre, puis répondre **dans le contexte** : valeur limite, seuil, date.

➤ **Astuce.** Pour un seuil, l'inéquation $y(t) > s$ se ramène à un logarithme. Pensez à **changer le sens** de l'inégalité si vous divisez par un coefficient négatif — c'est là que se perdent les points.

Méthode 6 — Vérifier qu'une fonction est solution

Quand. L'énoncé propose une expression et demande de vérifier qu'elle convient, souvent avant de faire résoudre le cas général.

1. Calculer y' à partir de l'expression donnée.
2. Calculer séparément $ay + b$.
3. Comparer les deux résultats — ne jamais partir de l'égalité à démontrer.
4. Vérifier la condition initiale s'il y en a une.

➤ **Bon réflexe.** Cette question vaut souvent un point pour trois lignes de calcul. Elle est aussi la meilleure façon de contrôler une résolution : si votre solution ne vérifie pas l'équation, l'erreur est en amont.

Méthode 7 — Résoudre $y' = ay + f$ avec solution particulière fournie

1. Vérifier que la fonction g fournie est solution : calculer g' et contrôler que $g'(x) = a\,g(x) + f(x)$ pour tout x.
2. Écrire la **solution générale** : $y(x) = g(x) + C\,e^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$ (théorème 7.6).
3. Exploiter la condition initiale pour déterminer C, puis conclure (variations, limite, interprétation).

➤ **Astuce de rédaction.** La vérification de l'étape 1 vaut des points à elle seule : rédigez-la en une chaîne d'égalités partant de $a\,g(x) + f(x)$ et aboutissant à $g'(x)$.

ERREURS FRÉQUENTES ET BONS RÉFLEXES

■ Erreur	✓ Bon réflexe
Oublier $+C$	Il y a une infinité de primitives, pas une seule
Primitiver sin en cos	C'est $-\cos$; le contrôle par dérivation le révèle
Oublier d'ajuster le coefficient de u'	Écrire $xe^{x^2} = (\frac{1}{2}) \times 2xe^{x^2}$
Primitiver un produit comme un produit de primitives	Aucune formule de ce type n'existe
Écrire $y = Ce^{ax} + \frac{b}{a}$	Le signe est $-\frac{b}{a}$: c'est la solution constante
Ne pas vérifier la solution obtenue	Une substitution suffit et élimine toute erreur de signe

MODULE PYTHON — MÉTHODE D'EULER POUR $y' = ay + b$

```
# Methode d'Euler pour y' = a*y + b
from math import exp

def euler(a, b, y0, x_max, h):
    # approximation pas a pas de la solution
    x = 0
    y = y0
    while x < x_max - h / 2:
        y = y + h * (a * y + b)
        x = x + h
    return y

def exacte(a, b, y0, x):
    # solution exacte : y = C * exp(a*x) - b/a avec C = y0 + b/a
    C = y0 + b / a
    return C * exp(a * x) - b / a

a = -0.5
b = 10
y0 = 80
x_max = 4

print("y' =", a, "y +", b, " y(0) =", y0, " x =", x_max)
print("valeur exacte :", round(exacte(a, b, y0, x_max), 6))
liste_h = [0.5, 0.1, 0.01, 0.001]
for i in range(len(liste_h)):
    h = liste_h[i]
    approx = euler(a, b, y0, x_max, h)
    ecart = abs(approx - exacte(a, b, y0, x_max))
    print("h =", h, " Euler :", round(approx, 6), " ecart :", round(ecart, 6))
print("etat d'equilibre : -b/a =", -b / a)
```

Trace d'exécution

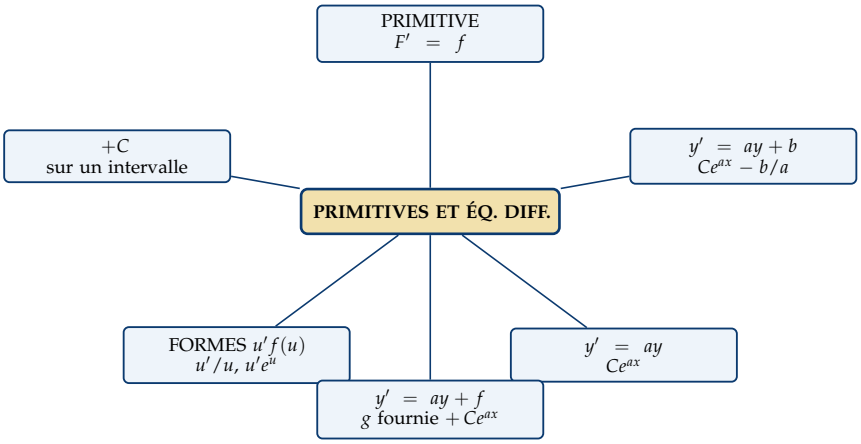
```
y' = -0.5 y + 10 y(0) = 80 x = 4
valeur exacte : 28.120117
h = 0.5 Euler : 26.006775 ecart : 2.113342
h = 0.1 Euler : 27.710729 ecart : 0.409388
h = 0.01 Euler : 28.079483 ecart : 0.040634
h = 0.001 Euler : 28.116057 ecart : 0.00406
etat d'equilibre : -b/a = 20.0
```

Interprétation mathématique. La solution exacte est $y(x) = 60e^{-0,5x} + 20$, et $y(4) = 60e^{-2} + 20 \approx 28,120$. Avec le pas grossier $h = 0,5$, l'erreur vaut encore environ $2,11$; à partir de $h = 0,1$, elle est **divisée par 10 quand le pas l'est** : $0,409$, puis $0,0406$, puis $0,0041$. C'est la signature d'une méthode d'**ordre 1**, dont l'erreur est proportionnelle à h.

La dernière ligne rappelle l'état d'équilibre $-\dfrac{b}{a} = 20$. La solution part de 80 et décroît vers 20 sans jamais l'atteindre — $y(4) \approx 28,1$ en est déjà proche.

■ La formule $y = Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$ exige $a \neq 0$. Pour $a = 0$, l'équation devient $y' = b$, dont les solutions sont les fonctions affines $y = bx + C$. **Ce cas se traite séparément, et le programme ci-dessus diviserait par zéro.**

SYNTHÈSE



7.4 — Synthèse du chapitre 7

Les trois réflexes du chapitre

1. Primitiver, c'est lire le tableau des dérivées **à l'envers** — sans oublier la constante C, sur un intervalle.
2. Toute solution de $y' = ay + b$ est la somme de la solution constante $-\dfrac{b}{a}$ et d'un terme $C\,e^{ax}$.
3. Une primitive — ou une solution d'équation différentielle — se vérifie **toujours** en dérivant : le contrôle est immédiat et gratuit.