Chapitre 8. Cours

Calcul intégral

Objectifs du chapitre — programme officiel (BO 2019)

Ce document contient. Cours complet : définitions, propriétés et démonstrations exigibles, fiches méthodes guidées, exemples résolus et synthèse du chapitre.

Extrait du manuel *Math Convergence — Terminale, spécialité mathématiques*
A. Choukoukou · session 2027 · reproduit avec l'autorisation de l'auteur.

CHAPITRE

8

CALCUL INTÉGRAL

Mesurer l'aire sous une courbe semble n'avoir aucun rapport avec la dérivation. Le théorème fondamental de l'analyse établit pourtant que ce sont deux faces d'une même opération — et il transforme un problème de mesure en un simple calcul de primitive.

Objectifs. Interpréter une intégrale comme une aire · calculer une intégrale à l'aide d'une primitive · appliquer Chasles, la linéarité et la positivité · déterminer une valeur moyenne · intégrer par parties · calculer une aire entre deux courbes · encadrer une intégrale sans la calculer.

Compétences travaillées. Calculer (dominante) · Représenter · Raisonner

Prérequis. Chapitre 7 : primitives usuelles et composées, $u'f(u)$ · chapitre 3 : continuité · chapitres 2, 5 et 6 : exponentielle, logarithme, fonctions trigonométriques · chapitre 4 : convexité.

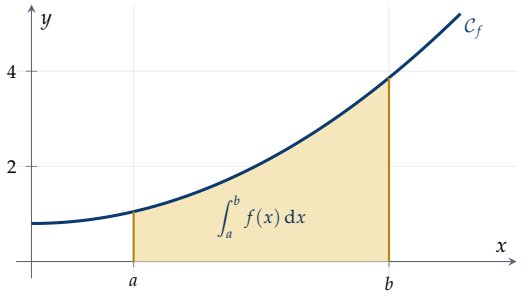
Diagnostic express.

1. Donner une primitive de $f(x) = x^2$.
2. Donner une primitive de $g(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.
3. Calculer l'aire d'un rectangle de largeur 3 et de hauteur 5.
4. Que vaut $F(2) - F(0)$ si $F(x) = x^3$?
5. Dériver $H(x) = x\ln x$.

Corrigé en fin de chapitre.

COURS

1. Intégrale d'une fonction continue positive



8.1 — L'intégrale d'une fonction positive est une aire

Définition 8.1. Si f est continue et **positive** sur $[a\,;\,b]$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

➤ **Bon réflexe.** L'intégrale est d'abord une **aire**, pas une formule. Quand un résultat vous surprend, dessinez : une aire ne peut pas être négative sous une courbe positive.

2. Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 8.2. Si f est continue sur I et $a \in I$, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est **l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.**

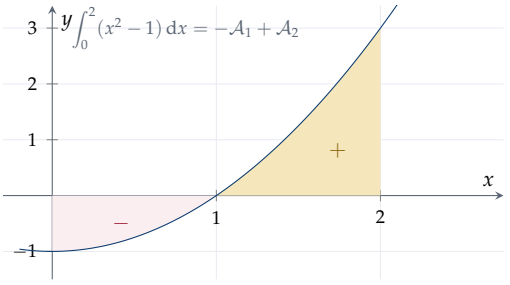
Conséquence, à connaître par cœur. Si F est une primitive de f sur $[a\,;\,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple d'application. $\displaystyle\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}.$

➤ **Astuce.** La constante d'intégration ne sert à rien ici : elle disparaît dans la soustraction $F(b) - F(a)$. Choisissez la primitive la plus simple.

3. Extension aux fonctions de signe quelconque



8.2 — Aire algébrique : le signe compte

Lorsque f change de signe, l'intégrale devient une **aire algébrique** : les portions situées sous l'axe comptent négativement.

■ **Erreur à éviter.** Confondre $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et l'aire du domaine. Si f change de signe, l'aire vaut $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$: il faut découper l'intervalle aux points d'annulation et sommer les valeurs absolues.

4. Propriétés

Théorème 8.3. Pour f et g continues et λ réel :

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(relation de Chasles)}$$

Enfin $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Théorème 8.4 (positivité et ordre). Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Si de plus $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

■ **Erreur à éviter.** Ces deux propriétés **exigent** $a \leqslant b$. Avec les bornes inversées, les inégalités changent de sens.

➤ **Bon réflexe.** Il n'existe **aucune** formule pour l'intégrale d'un produit ou d'un quotient. $\displaystyle\int fg \neq \left(\int f\right) \times \left(\int g\right)$: c'est l'erreur la plus coûteuse du chapitre.

5. Valeur moyenne

Définition 8.5. La **valeur moyenne** de f sur $[a\,;\,b]$, avec $a < b$, est

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

➤ **Lecture géométrique.** μ est la hauteur du rectangle de base $[a\,;\,b]$ qui a la même aire que le domaine sous la courbe. Le rectangle « lisse » la courbe.

6. Intégration par parties

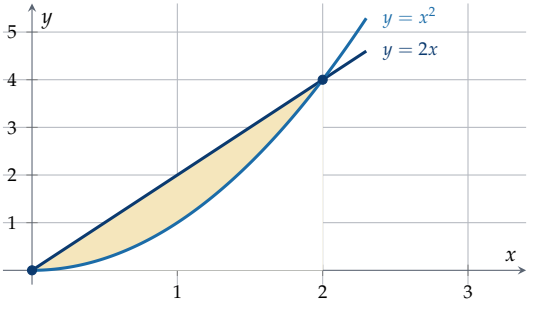
Théorème 8.6. Si u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[a\,;\,b]$:

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$$

➤ **Astuce du choix.** On dérive ce qui se simplifie, on intègre ce qui ne se dégrade pas. Un polynôme se dérive jusqu'à disparaître ; e^x et $\sin x$ ne changent pas de nature. Pour $\int x\,e^x\,\mathrm{d}x$: $v = x$ que l'on dérive, $u' = e^x$ que l'on intègre.

■ **Erreur à éviter.** Oublier le signe moins devant la seconde intégrale, ou omettre les crochets. Écrivez la formule complète **avant** de remplacer : c'est un point de barème à chaque sujet.

7. Aire entre deux courbes



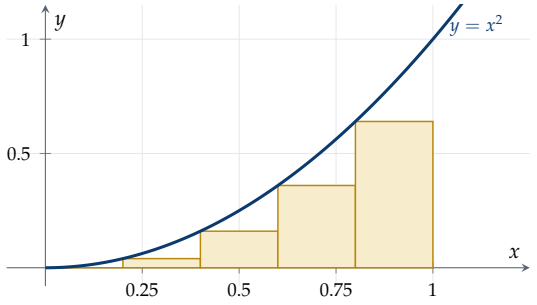
8.3 — Aire entre deux courbes

Si $f \geqslant g$ sur $[a\,;\,b]$, l'aire du domaine compris entre les deux courbes vaut

$$\mathcal{A} = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

➤ **Bon réflexe.** Déterminez d'abord les abscisses d'intersection en résolvant $f(x) = g(x)$, puis **étudiez le signe** de $f - g$ pour savoir laquelle des deux est au-dessus. Intervertir les deux fonctions donne l'aire au signe près.

8. Encadrement par des rectangles



8.4 — Encadrement par les rectangles de Riemann

Si f est continue et monotone sur $[a\,;\,b]$, on découpe l'intervalle en n parties de même longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$. La somme des aires des rectangles inférieurs minore l'intégrale, celle des rectangles supérieurs la majore, et l'écart entre les deux vaut $|f(b) - f(a)| \times h$, qui tend vers 0.
Ces sommes sont appelées **sommes de Riemann**.

➤ **Astuce.** L'écart entre les deux encadrements décroît en $\dfrac{1}{n}$. Pour gagner une décimale, il faut multiplier n par dix — c'est ce que le module Python de ce chapitre met en évidence.

MÉTHODES

Méthode 1 — Calculer une intégrale par primitive

Quand. C'est la voie ordinaire : dès qu'une primitive est identifiable.

1. Vérifier que f est continue sur $[a\,;\,b]$.
2. Déterminer **une** primitive F — la plus simple, sans constante.
3. Écrire $[F(x)]_a^b$, puis calculer $F(b) - F(a)$.
4. Contrôler en dérivant F : on doit retrouver f.

Exemple éclair. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \big[\ln x\big]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0{,}693$.

➤ **Bon réflexe.** Vérifiez la continuité **sur tout l'intervalle**. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ n'existe pas : la fonction n'est pas définie en 0.

Méthode 2 — Reconnaître une forme composée

Quand. L'intégrande ressemble à $u' \times$ (fonction de u).

1. Repérer un candidat u — souvent ce qui est sous une puissance, une racine, un logarithme ou une exponentielle.
2. Calculer u' et le chercher en facteur, quitte à ajuster par une constante.
3. Appliquer le tableau des formes usuelles.
4. Dériver pour vérifier.

$$u'u^n \to \frac{u^{n+1}}{n+1} \qquad \frac{u'}{u} \to \ln|u| \qquad u'e^u \to e^u \qquad \frac{u'}{\sqrt{u}} \to 2\sqrt{u}$$

➤ **Astuce.** Le facteur constant manquant se rattrape : pour $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$, on écrit $\displaystyle\frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1}$ et la primitive est $\displaystyle\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

Méthode 3 — Intégrer par parties

Quand. L'intégrande est un **produit** de deux fonctions de natures différentes, et aucune forme composée n'apparaît.

1. Choisir v (à dériver) et u' (à intégrer) — voir l'astuce du cours.
2. Calculer v' et u.
3. Écrire la formule **en entier**, crochets et signe compris.
4. Calculer le crochet, puis la nouvelle intégrale — qui doit être plus simple.

■ **Erreur à éviter.** Si la nouvelle intégrale est **plus compliquée** que la première, c'est que le choix est inversé. Reprenez en échangeant u' et v plutôt que de vous acharner.

Méthode 4 — Calculer une aire entre deux courbes

1. Résoudre $f(x) = g(x)$ pour obtenir les bornes.
2. Étudier le **signe** de $f - g$ sur l'intervalle.
3. Intégrer la différence, en plaçant en premier la fonction du dessus.
4. Préciser l'unité : le résultat s'exprime en **unités d'aire**.

➤ **Bon réflexe.** Une aire est positive. Un résultat négatif signale que vous avez inversé les deux fonctions — prenez l'opposé et signalez-le dans la rédaction plutôt que de recommencer.

Méthode 5 — Encadrer une intégrale sans la calculer

Quand. La primitive est inaccessible, ou l'énoncé demande un encadrement.

1. Encadrer f sur $[a\,;\,b]$: $m \leqslant f(x) \leqslant M$.
2. Intégrer l'encadrement — licite car $a \leqslant b$ — pour obtenir

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

3. Affiner si nécessaire en découpant l'intervalle.

➤ **Astuce.** Pour une suite $I_n = \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$, un encadrement bien choisi suffit presque toujours à conclure sur la limite par le théorème des gendarmes, sans jamais calculer I_n.

Méthode 6 — Étudier une suite d'intégrales

Quand. L'énoncé pose $I_n = \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et demande monotonie, signe, limite ou relation de récurrence. C'est l'exercice de fin de sujet le plus fréquent.

1. Signe. Étudier le signe de f_n sur $[a\,;\,b]$ et conclure par positivité.
2. Monotonie. Former $I_{n+1} - I_n = \int_a^b \big(f_{n+1}(x) - f_n(x)\big)\,\mathrm{d}x$ et étudier le signe de l'intégrande — jamais celui de la différence des résultats.
3. Récurrence. Une intégration par parties relie souvent I_{n+1} à I_n.
4. Limite. Encadrer, puis appliquer le théorème des gendarmes.

■ **Erreur à éviter.** Comparer I_{n+1} et I_n en calculant chacun séparément. On ne sait généralement pas les calculer — c'est tout l'intérêt de la question. Comparez les **intégrandes** sous une seule intégrale.

ERREURS FRÉQUENTES ET BONS RÉFLEXES

■ Erreur	✓ Bon réflexe
Écrire $\int fg = (\int f)(\int g)$	Aucune formule de ce type n'existe
Laisser x dans le résultat	La variable d'intégration est muette
Ajouter $+C$ dans une intégrale définie	La constante s'élimine par différence
Confondre intégrale et aire pour $f \leqslant 0$	L'intégrale est une aire **algébrique**
Appliquer la positivité avec $a > b$	La positivité et la croissance (théorème 8.4) exigent $a \leqslant b$
Intégrer entre deux courbes sans étudier le signe	Découper aux points d'intersection
Choisir $v = e^x$ dans une IPP	On choisit v dont la dérivée **simplifie**

MODULE PYTHON — MÉTHODES DES RECTANGLES ET DES TRAPÈZES

```
# Methodes des rectangles et des trapezes

def f(x):
    return x ** 2

def rectangles_gauche(a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + f(a + k * h)
    return s * h

def rectangles_droite(a, b, n):
    h = (b - a) / n
```

```
    s = 0
    for k in range(1, n + 1):
        s = s + f(a + k * h)
    return s * h

def trapezes(a, b, n):
    return (rectangles_gauche(a, b, n) + rectangles_droite(a, b, n)) / 2

exact = 1 / 3
print("Integrale de x**2 sur [0 ; 1], exacte :", round(exact, 8))
liste_n = [4, 10, 100, 1000]
for i in range(len(liste_n)):
    n = liste_n[i]
    g = rectangles_gauche(0, 1, n)
    d = rectangles_droite(0, 1, n)
    t = trapezes(0, 1, n)
    print("n =", n, " gauche :", round(g, 8), " droite :", round(d, 8))
    print(" trapezes :", round(t, 8))
```

Trace d'exécution

```
Integrale de x**2 sur [0 ; 1], exacte : 0.33333333
n = 4 gauche : 0.21875 droite : 0.46875
       trapezes : 0.34375
n = 10 gauche : 0.285 droite : 0.385
       trapezes : 0.335
n = 100 gauche : 0.32835 droite : 0.33835
       trapezes : 0.33335
n = 1000 gauche : 0.3328335 droite : 0.3338335
       trapezes : 0.3333335
```

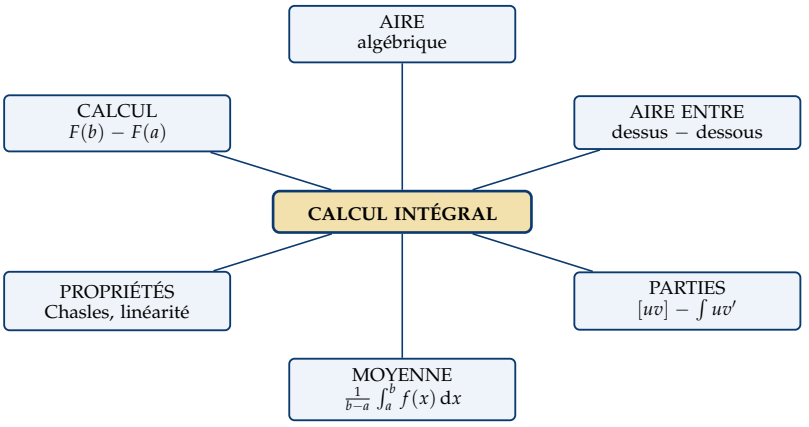
Interprétation mathématique. La fonction x^2 étant **croissante** sur $[0\,;\,1]$, la somme de gauche minore l'intégrale et celle de droite la majore : $0,32835 \leqslant \dfrac{1}{3} \leqslant 0,33835$ pour $n = 100$. C'est exactement l'encadrement du §8.

L'écart entre les deux sommes vaut $[f(1) - f(0)] \times h = \dfrac{1}{n}$: on lit $0,25$, $0,1$, $0,01$, $0,001$ en soustrayant les deux colonnes. ✓

La méthode des trapèzes, moyenne des deux, converge bien plus vite : son erreur est **divisée par 100 quand n est multiplié par 10**, ce qui la place à l'ordre 2, contre l'ordre 1 des rectangles.

■ L'encadrement *gauche* $\leqslant I \leqslant$ *droite* **suppose f croissante**. Pour une fonction décroissante, les rôles s'inversent ; pour une fonction non monotone, il faut découper. **La monotonie est l'hypothèse qui rend la méthode valide.**

SYNTHÈSE



8.5 — Synthèse du chapitre 8

Les trois réflexes du chapitre

1. Le résultat ne contient jamais la variable d'intégration.
2. Pour une IPP, on choisit v dont la dérivée simplifie : polynôme ou logarithme.
3. Aire entre deux courbes : d'abord le signe de la différence, ensuite l'intégrale.

EXERCICES

SÉRIE A ★

EXERCICE 256 ★

Soit $f(x) = 3$ sur $[1\,;5]$. Interpréter $\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ géométriquement et calculer sa valeur sans primitive.

EXERCICE 257 ★

Calculer. a. $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ · b. $\int_0^2 (3x+1)\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 258 ★

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$ puis $\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 259 ★

On donne $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ et $\int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$. Calculer $\int_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x$ puis $\int_7^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.