Chapitre 9. Cours

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Objectifs du chapitre — programme officiel (BO 2019)

Ce document contient. Cours complet : définitions, propriétés et démonstrations exigibles, fiches méthodes guidées, exemples résolus et synthèse du chapitre.

Extrait du manuel *Math Convergence — Terminale, spécialité mathématiques*
A. Choukoukou · session 2027 · reproduit avec l'autorisation de l'auteur.

CHAPITRE

9

VECTEURS, DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Trois nombres suffisent à repérer n'importe quel point de l'espace. Une fois ce repérage installé, toute question de géométrie — alignement, intersection, parallélisme — devient un système d'équations.

Objectifs. Manipuler les vecteurs de l'espace · caractériser colinéarité et coplanarité · décomposer un vecteur dans une base · déterminer une représentation paramétrique de droite ou de plan · étudier les positions relatives et déterminer une intersection.

Compétences travaillées. Représenter (dominante) · Calculer · Raisonner

Prérequis. Vecteurs du plan de Première : opérations, relation de Chasles, colinéarité · résolution de systèmes linéaires · acquis de Première : raisonnement par équivalence, disjonction de cas.

Diagnostic express.

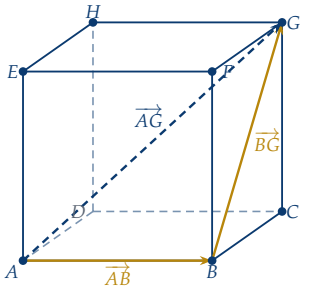
1. Dans le plan, que signifie « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires » ?
2. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ si $A(1\,;\,3)$ et $B(4\,;\,-1)$.
3. Résoudre le système $x + y = 3$ et $2x - y = 0$.
4. Combien de points définissent un plan ?
5. Deux droites de l'espace se coupent-elles toujours ?

Corrigé en fin de chapitre.

COURS

1. Vecteurs de l'espace

Tout ce que vous savez des vecteurs du plan reste vrai dans l'espace, sans exception : égalité, somme, produit par un réel, relation de Chasles. Rien à réapprendre.



9.1 — Relation de Chasles dans le cube : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$

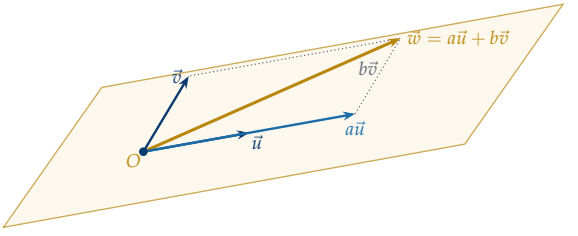
Définition 9.1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$, ou lorsque $\vec{u} = \vec{0}$.

Propriété 9.2. A, B, C sont **alignés** $\iff$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple. Dans le cube ci-dessus, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$: le chemin $A \to B \to G$ et le chemin direct $A \to G$ donnent le même vecteur.

➤ **Bon réflexe.** Face à une somme de vecteurs, cherchez les **points intermédiaires qui s'éliminent**. Chasles ne sert qu'à ça : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

2. Coplanarité



9.2 — Décomposition d'un vecteur coplanaire : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

Définition 9.3. $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont **coplanaires** lorsqu'ils admettent des représentants contenus dans un même plan.

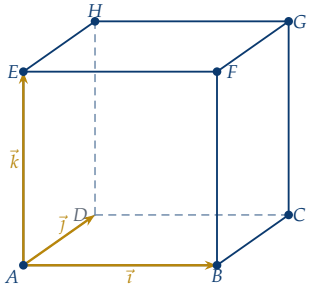
Théorème 9.4. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **ne sont pas colinéaires** :

$$\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w} \text{ coplanaires} \iff \exists\,(a\,;\,b) \in \mathbb{R}^2,\ \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

Propriété 9.5. A, B, C, D sont coplanaires $\iff$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

■ **Erreur à éviter.** Le théorème **exige** que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires. S'ils le sont, ils ne définissent aucun plan et la décomposition n'a plus de sens.

3. Bases et repères



9.3 — Le repère $(A\,;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ associé au cube

Définition 9.6. Trois vecteurs **non coplanaires** $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ forment une **base** de l'espace. Associés à un point O, ils forment un **repère** $(O\,;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Théorème 9.7 (décomposition unique). Dans une base, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière **unique** $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Le triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ est le triplet des **coordonnées** de $\vec{u}$.

➤ **Astuce.** Dans un cube $ABCDEFGH$, le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ donne à tous les sommets des coordonnées dans $\{0\,;\,1\}$. Aucun calcul, une simple lecture.

4. Calculs en coordonnées

Dans un repère, si $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$:

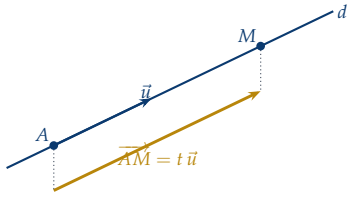
$\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A\,;\,z_B - z_A)$ **et le milieu** I **de** $[AB]$ **a pour coordonnées**

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\,\frac{y_A + y_B}{2}\,;\,\frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

Colinéarité en coordonnées. Pour $\vec{u} \neq \vec{0}$, les vecteurs $\vec{u}(x\,;\,y\,;\,z)$ et $\vec{v}(x'\,;\,y'\,;\,z')$ sont colinéaires si et seulement s'il existe k tel que $x' = kx$, $y' = ky$ **et** $z' = kz$. (Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.)

■ **Erreur à éviter. Trois** égalités à vérifier, pas deux. Deux coordonnées proportionnelles ne suffisent pas dans l'espace.

5. Droites de l'espace



9.4 — Un point M de la droite : $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$

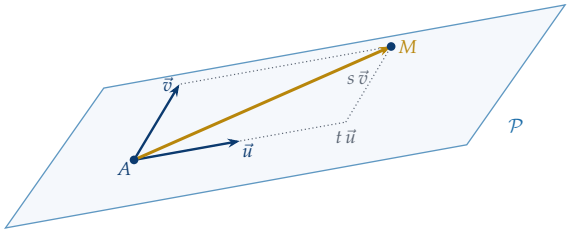
Définition 9.8. La droite passant par A et de **vecteur directeur** $\vec{u} \neq \vec{0}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Représentation paramétrique. Si $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $\vec{u}(a\,;\,b\,;\,c)$:

$$\begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

➤ **Bon réflexe.** Une droite admet une **infinité** de représentations paramétriques : elles dépendent du point choisi et du vecteur directeur, défini à un facteur près. Deux systèmes différents peuvent décrire la même droite.

6. Plans de l'espace



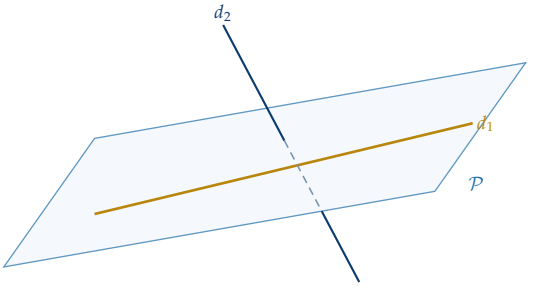
9.5 — Un point M du plan : $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u} + s\,\vec{v}$

Définition 9.9. Le plan passant par A et dirigé par deux vecteurs **non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u} + s\,\vec{v}$, avec $(t\,;\,s) \in \mathbb{R}^2$.

Représentation paramétrique. Avec $\vec{u}(a\,;\,b\,;\,c)$ et $\vec{v}(a'\,;\,b'\,;\,c')$:

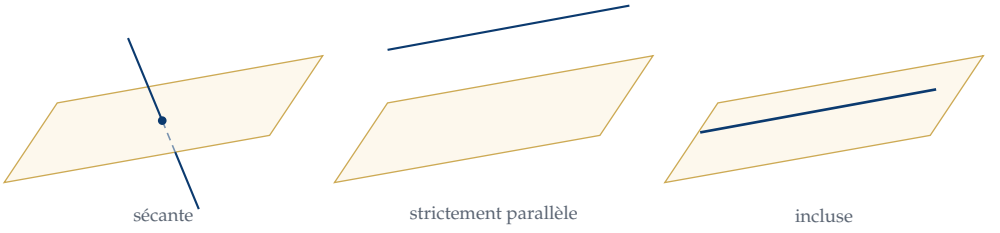
$$\begin{cases} x = x_A + a\,t + a'\,s \\ y = y_A + b\,t + b'\,s \\ z = z_A + c\,t + c'\,s \end{cases} \qquad (t\,;\,s) \in \mathbb{R}^2$$

7. Positions relatives



9.6 — Deux droites non coplanaires : ni parallèles, ni sécantes

Dans l'espace, deux droites peuvent être **coplanaires** — alors parallèles ou sécantes — ou **non coplanaires**. Ce troisième cas n'existe pas dans le plan : c'est la seule vraie nouveauté du chapitre.



9.7 — Les trois positions relatives d'une droite et d'un plan

➤ **Bon réflexe.** Pour trancher entre les trois cas, résolvez le système. **Une** solution : sécante. **Aucune** : strictement parallèle. Une **infinité** : incluse. Le nombre de solutions donne la réponse, pas le dessin.

MÉTHODES

Méthode 1 — Démontrer une colinéarité ou un alignement

Quand. Deux vecteurs proportionnels ? Trois points sur une même droite ? C'est la même question.

1. Calculer les coordonnées des deux vecteurs — pour trois points A, B, C, prendre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Chercher k à partir d'une coordonnée **non nulle**.
3. Vérifier les **deux autres** coordonnées.
4. Conclure — et pour trois points, ajouter qu'ils ont le point A en commun.

Exemple éclair. $\vec{u}(2\,;\,-4\,;\,6)$ et $\vec{v}(-1\,;\,2\,;\,-3)$: on pose $\vec{v} = k\,\vec{u}$; la première coordonnée donne $k = -\dfrac{1}{2}$; on vérifie $2 = -\dfrac{1}{2} \times (-4)$ ✓ et $-3 = -\dfrac{1}{2} \times 6$ ✓ Colinéaires.

■ **Erreur à éviter.** Conclure sur deux coordonnées. Dans l'espace il en faut **trois** : deux suffisent dans le plan, pas ici.

Méthode 2 — Décomposer un vecteur, tester une coplanarité

Quand. « Ces trois vecteurs sont-ils coplanaires ? », « décomposer $\vec{w}$ sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ » : une seule et même méthode.

1. Vérifier d'abord que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont **pas** colinéaires.
2. Écrire $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$ et traduire en système de **trois** équations.
3. Résoudre avec **deux** équations bien choisies.
4. Reporter dans la troisième : c'est elle qui décide.

➤ **Bon réflexe.** Deux équations donnent le couple $(a\,;\,b)$, la troisième donne la **réponse**. Si elle est vérifiée, les vecteurs sont coplanaires ; sinon, ils ne le sont pas. Sauter cette étape, c'est répondre à côté de la question posée.

Astuce. Choisissez pour l'étape 3 les deux équations où une inconnue disparaît le plus vite — souvent celles qui contiennent un zéro.

Méthode 3 — Déterminer une représentation paramétrique

Quand. Une droite ou un plan est donné par des points ou des vecteurs, et l'on veut en faire un objet calculable.

1. Identifier un **point** de l'objet et un ou deux **vecteurs directeurs**.
2. Pour une droite définie par A et B, prendre $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ — et le simplifier.
3. Écrire les trois équations coordonnée par coordonnée.
4. Préciser le domaine du ou des paramètres : $t \in \mathbb{R}$, ou $(t\,;\,s) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple éclair. $A(0\,;\,1\,;\,2)$, $\overrightarrow{AB}(3\,;\,0\,;\,-3)$, simplifié en $\vec{u}(1\,;\,0\,;\,-1)$: on obtient $x = t$, $y = 1$, $z = 2 - t$.

➤ **Bon réflexe.** Contrôlez toujours en substituant : $t = 0$ doit redonner le point de départ.

■ **Erreur à éviter.** Dire « **la** représentation paramétrique ». Il y en a une infinité : le point et le facteur du vecteur directeur sont libres. Deux systèmes différents peuvent décrire la même droite.

Méthode 4 — Tester l'appartenance d'un point

Quand. « Le point M appartient-il à d ? » — et, sous une autre forme, dans toute recherche d'intersection.

1. Remplacer les coordonnées de M dans la représentation paramétrique.
2. Résoudre la première ligne en le paramètre.
3. Reporter cette valeur dans les deux autres.
4. Conclure.

■ **Erreur à éviter.** Il faut la **même** valeur du paramètre pour les trois lignes. Trois valeurs différentes qui « fonctionnent » chacune de leur côté ne prouvent rien.

Méthode 5 — Étudier une position relative

Quand. Deux droites, une droite et un plan, deux plans : la démarche ne change pas.

1. Comparer d'abord les **vecteurs directeurs**.
2. S'ils sont colinéaires : parallèles. Reste à savoir si les objets sont confondus — tester un point de l'un dans l'autre.
3. Sinon, écrire le système d'identification avec **deux paramètres distincts**.
4. Compter les solutions : **une** → sécants ; **aucune** → non coplanaires (deux droites) ou strictement parallèles ; une **infinité** → confondus ou inclus.

➤ **Bon réflexe.** Avant tout calcul, comparez les vecteurs directeurs. Colinéaires, le système est inutile : la réponse est déjà là.

■ **Erreur à éviter.** Croire que deux droites non parallèles se coupent. Vrai dans le plan, **faux** dans l'espace : elles peuvent être non coplanaires. C'est le piège numéro un du chapitre.

Astuce. Un paramètre par objet : t pour la première droite, s pour la seconde. Employer t deux fois revient à imposer que les deux points soient atteints « en même temps » — et fait rater des intersections.

Méthode 6 — Trouver l'intersection d'une droite et d'un plan

Quand. Sections planes d'un solide, point percé par une diagonale, problèmes de type baccalauréat.

1. Écrire la droite avec t, le plan avec $(u\,;\,v)$.
2. Identifier les trois coordonnées : trois équations, trois inconnues.
3. Résoudre — commencer par l'équation la plus pauvre en inconnues.
4. Reporter la valeur de t dans la droite pour obtenir le point.
5. Vérifier que le point obtenu appartient bien aux deux objets.

Astuce. Dans un cube de repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, tous les sommets ont des coordonnées valant 0 ou 1. Le système devient arithmétique : plus de fractions avant la fin.

Méthode 7 — Démontrer un parallélisme droite-plan

Quand. « Démontrer que (EG) est parallèle au plan (ABC) » — très fréquent sur les figures de solides.

1. Calculer un vecteur directeur $\vec{w}$ de la droite.
2. Montrer que $\vec{w}$ se décompose sur les deux vecteurs directeurs du plan — ou, plus rapide, qu'il est colinéaire à un vecteur du plan.
3. Exhiber un point de la droite **n'appartenant pas** au plan.
4. Conclure au parallélisme **strict**.

■ **Erreur à éviter.** S'arrêter à l'étape 2. Sans le point extérieur, la droite pourrait être **incluse** dans le plan : la démonstration est incomplète et le point de rédaction est perdu.

ERREURS FRÉQUENTES ET BONS RÉFLEXES

■ Erreur	✓ Bon réflexe
Conclure à la colinéarité sur deux coordonnées	Il en faut trois
Utiliser le même paramètre pour deux droites	t pour l'une, s pour l'autre
Oublier de vérifier la troisième équation	Les deux premières peuvent avoir une solution que la troisième invalide
Croire que deux droites non parallèles se coupent	Faux dans l'espace : elles peuvent être non coplanaires
Parler de « la » représentation paramétrique	Il y en a une infinité
Choisir deux vecteurs directeurs colinéaires pour un plan	La définition 9.9 l'interdit — on n'obtiendrait qu'une droite

MODULE PYTHON — COLINÉARITÉ ET COPLANARITÉ

```
# Colinearite, coplanarite et intersection

def colineaires(u, v):
    # les coordonnees du produit vectoriel sont toutes nulles
    c1 = u[1] * v[2] - u[2] * v[1]
    c2 = u[2] * v[0] - u[0] * v[2]
    c3 = u[0] * v[1] - u[1] * v[0]
    return c1 == 0 and c2 == 0 and c3 == 0

def determinant(u, v, w):
    return (u[0] * (v[1] * w[2] - v[2] * w[1])
          - u[1] * (v[0] * w[2] - v[2] * w[0])
          + u[2] * (v[0] * w[1] - v[1] * w[0]))

u = [3, -2, -2]
v = [-3, 2, 2]
print("u = (3, -2, -2) et v = (-3, 2, 2) :", colineaires(u, v))
u = [1, 2, 3]
v = [2, 4, 7]
print("u = (1, 2, 3) et v = (2, 4, 7) :", colineaires(u, v))
print()
d = determinant([1, 1, 0], [0, 1, 1], [1, 2, 1])
print("(1,1,0), (0,1,1), (1,2,1) : det =", d, " coplanaires :", d == 0)
d = determinant([1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1])
print("(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) : det =", d, " coplanaires :", d == 0)
```

Trace d'exécution

```
u = (3, -2, -2) et v = (-3, 2, 2) : True
u = (1, 2, 3) et v = (2, 4, 7) : False

(1,1,0), (0,1,1), (1,2,1) : det = 0 coplanaires : True
(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) : det = 1 coplanaires : False
```

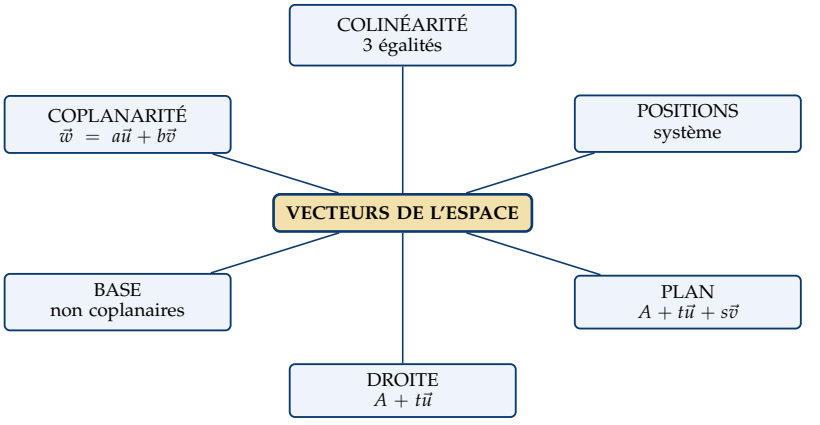
Interprétation mathématique. Le premier test confirme $\vec{v} = -\vec{u}$: les deux vecteurs sont colinéaires. Le second est instructif — les **deux premières** coordonnées sont proportionnelles, $2 = 2 \times 1$ et $4 = 2 \times 2$, mais pas la troisième, $7 \neq 2 \times 3$. Le produit vectoriel $(2\,;\,-1\,;\,0)$ n'est pas nul, et il détecte précisément cet écart.

C'est l'illustration de l'avertissement du §4 : **dans l'espace, deux égalités sur trois ne concluent rien.**

Le déterminant nul du troisième test signale la coplanarité ; le déterminant 1 du quatrième confirme que la base canonique n'est pas coplanaire — c'est bien une base.

■ Produit vectoriel et déterminant **ne figurent pas au programme**. Ils sont utilisés ici uniquement comme outils de vérification numérique, jamais dans une rédaction. Les méthodes 1 et 2 restent les seules attendues.

SYNTHÈSE



9.8 — Synthèse du chapitre 9

Les trois réflexes du chapitre

1. Colinéarité dans l'espace : trois égalités, pas deux.
2. Deux droites : deux paramètres de noms différents.
3. Résoudre deux équations, puis **vérifier la troisième**.