Chapitre 10. Cours

Orthogonalité et produit scalaire dans l'espace

Objectifs du chapitre — programme officiel (BO 2019)

Ce document contient. Cours complet : définitions, propriétés et démonstrations exigibles, fiches méthodes guidées, exemples résolus et synthèse du chapitre.

Extrait du manuel *Math Convergence — Terminale, spécialité mathématiques*
A. Choukoukou · session 2027 · reproduit avec l'autorisation de l'auteur.

CHAPITRE

10

ORTHOGONALITÉ, PRODUIT SCALAIRE ET DISTANCES DANS L'ESPACE

Un seul nombre, le produit scalaire, encode à la fois les longueurs et les angles. Il transforme un plan — objet à deux paramètres — en une seule équation, et il rend calculable toute distance de l'espace.

Objectifs. Calculer un produit scalaire dans l'espace · caractériser l'orthogonalité · déterminer un vecteur normal et une équation cartésienne de plan · étudier les positions relatives par les normales · déterminer un projeté orthogonal et une distance.

Compétences travaillées. Calculer (dominante) · Représenter · Raisonner

Prérequis. Chapitre 9 en totalité · produit scalaire dans le plan de Première.

Diagnostic express.

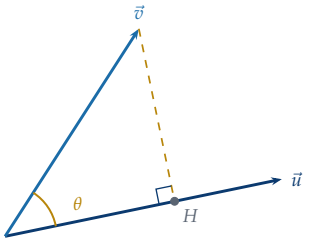
1. Dans le plan, que vaut $\vec{u} \cdot \vec{v}$ si $\vec{u}(1\,;\,2)$ et $\vec{v}(3\,;\,-1)$?
2. Que signifie $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$?
3. Calculer $\sqrt{1+4+4}$.
4. Résoudre $2x - 6 = 0$.
5. Quelle est la longueur AB si $A(0\,;\,0)$ et $B(3\,;\,4)$?

Corrigé en fin de chapitre.

COURS

1. Produit scalaire

Un seul nombre encode à la fois une longueur et un angle. C'est tout l'intérêt du produit scalaire : il transforme la géométrie en calcul.



10.1 — Produit scalaire et projection

Définition 10.1. Pour deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\,\vec{v}}\right)$$

Si l'un des deux vecteurs est nul, le produit scalaire vaut 0.

Théorème 10.2 (expression analytique). Dans un repère **orthonormé**, si $\vec{u}(x\,;\,y\,;\,z)$ et $\vec{v}(x'\,;\,y'\,;\,z')$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Norme et distance.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Exemple d'application. $\vec{u}(1\,;\,2\,;\,-2)$ et $\vec{v}(3\,;\,0\,;\,1)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 + 0 - 2 = 1$, et $\|\vec{u}\| = \sqrt{1+4+4} = 3$.

■ **Erreur à éviter.** L'expression analytique **exige un repère orthonormé**. Dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ d'un cube d'arête 1, c'est vrai ; dans celui d'un pavé ou d'un tétraèdre quelconque, c'est faux.

2. Propriétés de calcul

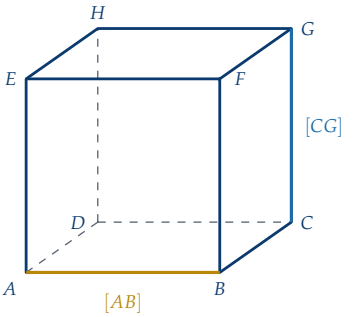
Théorème 10.3. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel k :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \qquad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \qquad (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Identité à connaître. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

➤ **Astuce.** Le produit scalaire se calcule comme un produit ordinaire : on développe. C'est ce qui permet de traiter $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en décomposant sur la base, sans jamais chercher d'angle.

3. Orthogonalité



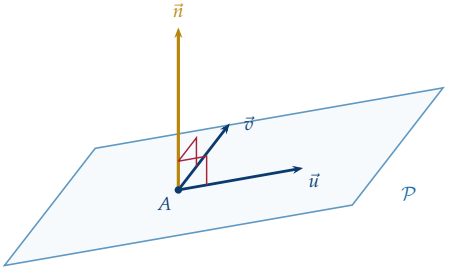
10.2 — Orthogonales sans être sécantes

Définition 10.4. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Propriété 10.5. Deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonales** lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

➤ **Bon réflexe. Orthogonales** n'est pas **perpendiculaires**. Dans l'espace, deux droites peuvent être orthogonales sans se couper — $[AB]$ et $[CG]$ dans le cube. Perpendiculaires suppose en plus qu'elles soient sécantes.

4. Vecteur normal à un plan



10.3 — Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$ — donc à tous les vecteurs du plan

Définition 10.6. Un vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ est **normal** au plan $\mathcal{P}$ lorsqu'il est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.

Théorème 10.7. Si $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$, alors $\vec{n}$ est orthogonal à **tout** vecteur de la direction de $\mathcal{P}$.

Théorème 10.8. Un plan est entièrement déterminé par **un point** et **un vecteur normal**.

Exemple d'application. Le plan dirigé par $\vec{u}(1\,;\,1\,;\,0)$ et $\vec{v}(0\,;\,1\,;\,1)$ admet $\vec{n}(1\,;\,-1\,;\,1)$ pour vecteur normal : $\vec{n} \cdot \vec{u} = 1 - 1 = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = -1 + 1 = 0$.

5. Équation cartésienne d'un plan

Théorème 10.9. Dans un repère orthonormé, le plan passant par $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ a pour équation

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0,$$

soit $ax+by+cz+d=0$ avec $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$.

Réciproque. Toute équation $ax+by+cz+d=0$ avec $(a\,;\,b\,;\,c)\neq(0\,;\,0\,;\,0)$ est celle d'un plan de vecteur normal $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$.

➤ **Le gain est considérable.** Une représentation paramétrique de plan compte trois lignes et deux paramètres ; l'équation cartésienne tient en une ligne sans paramètre, **et les coefficients donnent directement le vecteur normal**. Passez à la cartésienne dès que c'est possible.

6. Positions relatives par les normales

plans parallèles	plans perpendiculaires	droite ∥ plan	droite ⊥ plan
$\vec{n_1} \parallel \vec{n_2}$	$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$	$\vec{u}\cdot\vec{n}=0$	$\vec{u} \parallel \vec{n}$

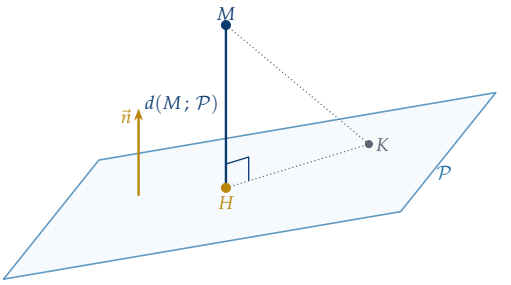
10.4 — Lire la position sur les normales

$\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2 \iff \vec{n_1}$ **et** $\vec{n_2}$ **colinéaires** $\qquad \mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2 \iff \vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$
$d \parallel \mathcal{P} \iff \vec{u}\cdot\vec{n}=0 \qquad d \perp \mathcal{P} \iff \vec{u}$ **et** $\vec{n}$ **colinéaires**

■ **Erreur à éviter.** Les deux dernières lignes se croisent : pour une **droite** et un **plan**, le produit scalaire nul signifie **parallèle**, pas perpendiculaire. Écrire l'inverse est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

➤ **Bon réflexe.** $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ donne le parallélisme, mais pas l'inclusion. Testez ensuite **un point** de la droite dans l'équation du plan : s'il la vérifie, la droite est incluse.

7. Projeté orthogonal et distance



10.5 — Projeté orthogonal et distance d'un point à un plan

Définition 10.10. Le **projeté orthogonal** de M sur $\mathcal{P}$ est le point H de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{MH}$ soit normal à $\mathcal{P}$. La **distance** de M à $\mathcal{P}$ est MH, et c'est la plus courte distance de M à un point du plan.

Théorème 10.11 (distance point-plan). Si $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ dans un repère orthonormé, alors

$$d(M\,;\,\mathcal{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Formule non exigible au bac : savoir retrouver la distance par le projeté orthogonal.

Exemple d'application. Distance de $M(1\,;\,1\,;\,1)$ au plan $x + y + z - 1 = 0$:

$$d = \frac{|1+1+1-1|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}155$$

➤ **Astuce.** La valeur absolue au numérateur n'est pas décorative : elle rend la distance positive quel que soit le côté du plan où se trouve M. Son signe, lui, indique de quel côté — une information parfois demandée.

■ **Erreur à éviter.** Oublier de normaliser, c'est-à-dire diviser par $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Sans cette division, le résultat dépend du choix arbitraire du vecteur normal.

MÉTHODES

Méthode 1 — Déterminer une équation cartésienne de plan

Quand. Un plan est donné par un point et un vecteur normal, ou par trois points.

1. Obtenir un vecteur normal $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ — donné, ou calculé par la méthode 2.
2. Écrire $ax + by + cz + d = 0$.
3. Déterminer d en substituant les coordonnées d'un point du plan.
4. Vérifier avec un **second** point.

Exemple éclair. $A(1\,;\,2\,;\,-1)$, $\vec{n}(3\,;\,-1\,;\,2)$: $3x - y + 2z + d = 0$ avec $3 - 2 - 2 + d = 0$, donc $d = 1$ et $\mathcal{P} : 3x - y + 2z + 1 = 0$.

➤ **Astuce.** Multiplier l'équation par un réel non nul ne change pas le plan. Simplifiez : $6x + 3y + 2z - 6 = 0$ vaut mieux que $12x + 6y + 4z - 12 = 0$.

Méthode 2 — Trouver un vecteur normal à partir de trois points

Quand. Le plan est donné par A, B, C non alignés.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Poser $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ et écrire $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
3. Résoudre le système : deux équations, trois inconnues — il reste un degré de liberté.
4. Choisir une valeur simple pour l'inconnue libre, en évitant les fractions.

➤ **Bon réflexe.** Le système est **normal** d'avoir une infinité de solutions : tous les vecteurs normaux d'un plan sont colinéaires. Choisissez le plus simple, puis **vérifiez** les deux produits scalaires.

Méthode 3 — Intersection droite-plan par l'équation cartésienne

Quand. Le plan a une équation cartésienne : la méthode devient une simple substitution.

1. Écrire la droite sous forme paramétrique.
2. Substituer x, y, z dans l'équation du plan : on obtient **une** équation en t.
3. Résoudre. Une solution → sécants. Aucune → parallèle stricte. Une identité → droite incluse.
4. Reporter t dans la droite pour obtenir le point.

Exemple éclair. $d : (1 + t\,;\,2 - t\,;\,t)$ et $\mathcal{P} : x + y + 2z - 3 = 0$ donnent $(1 + t) + (2 - t) + 2t - 3 = 0$, soit $2t = 0$ et $t = 0$: le point d'intersection est $(1\,;\,2\,;\,0)$.

➤ **Le gain.** Par la représentation paramétrique du plan, ce calcul demandait trois équations et trois inconnues. Par l'équation cartésienne, une seule équation à une inconnue. Convertissez systématiquement.

Méthode 4 — Déterminer un projeté orthogonal

Quand. Projeté d'un point sur un plan, ou sur une droite. Deux situations, une même idée : suivre la perpendiculaire.

Sur un plan. 1. Écrire la droite passant par M et de vecteur directeur $\vec{n}$, normal au plan.
2. Substituer dans l'équation du plan et résoudre en t.
3. Reporter : on obtient H.

Sur une droite. 1. Écrire H comme point courant de la droite, en fonction de t.
2. Traduire $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$: une équation en t.
3. Résoudre et reporter.

■ **Erreur à éviter.** Confondre les deux cas. Sur un plan on suit le vecteur **normal** ; sur une droite on impose l'orthogonalité au vecteur **directeur**. Prendre le mauvais vecteur donne un point qui n'a aucun sens.

Méthode 5 — Calculer une distance

Point-plan. Appliquer directement $d(M\,;\,\mathcal{P}) = \dfrac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Point-droite. Déterminer le projeté H (méthode 4), puis calculer MH.

Entre deux plans parallèles. Prendre un point de l'un, appliquer la formule avec l'autre.

➤ **Astuce.** Pour une distance point-plan, le projeté n'est **pas** nécessaire : la formule suffit. Ne le calculez que si l'énoncé demande ses coordonnées.

Méthode 6 — Démontrer une orthogonalité dans un solide

Quand. « Démontrer que (AF) et (BE) sont perpendiculaires », « que (AG) est orthogonale au plan (BDE) ».

1. Choisir un repère **orthonormé** adapté au solide — pour un cube d'arête 1, $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
2. Lire les coordonnées des sommets : elles valent 0 ou 1.
3. Calculer le ou les produits scalaires.
4. Pour une droite orthogonale à un plan, vérifier l'orthogonalité avec **deux** vecteurs directeurs non colinéaires du plan.
5. Conclure en distinguant **orthogonal** et **perpendiculaire**.

■ **Erreur à éviter.** Employer l'expression analytique dans un repère qui n'est pas orthonormé — un pavé non cubique, un tétraèdre quelconque. Justifiez toujours le caractère orthonormé du repère avant de calculer.

ERREURS FRÉQUENTES ET BONS RÉFLEXES

■ Erreur	✓ Bon réflexe
Utiliser $xx' + yy' + zz'$ en repère non orthonormé	La formule exige l'orthonormalité
Oublier la valeur absolue dans la distance	Une distance est positive
Oublier d dans le numérateur de la formule	L'équation doit être écrite sous la forme $= 0$
Confondre orthogonales et perpendiculaires	Perpendiculaires = orthogonales **et** sécantes
Croire le vecteur normal unique	Il est défini à un facteur non nul près
Chercher deux vecteurs directeurs quand la normale suffit	Un point et une normale déterminent le plan

MODULE PYTHON — DISTANCE ET PROJETÉ ORTHOGONAL

```
# Distance, projete orthogonal et angle
from math import sqrt

def produit_scalaire(u, v):
    return u[0] * v[0] + u[1] * v[1] + u[2] * v[2]

def norme(u):
    return sqrt(produit_scalaire(u, u))

def distance_point_plan(M, a, b, c, d):
    # plan d'equation a*x + b*y + c*z + d = 0
    numerateur = abs(a * M[0] + b * M[1] + c * M[2] + d)
    return numerateur / sqrt(a * a + b * b + c * c)

def projete_sur_plan(M, a, b, c, d):
    k = (a * M[0] + b * M[1] + c * M[2] + d) / (a * a + b * b + c * c)
    return [M[0] - k * a, M[1] - k * b, M[2] - k * c]

M = [1, 1, 1]
a = 1
b = 2
c = 3
d = -1
print("Plan P : x + 2y + 3z - 1 = 0 et M(1 ; 1 ; 1)")
distance = distance_point_plan(M, a, b, c, d)
print("distance de M au plan :", round(distance, 6))
H = projete_sur_plan(M, a, b, c, d)
print("projete H :", round(H[0], 6), ";", round(H[1], 6), ";", round(H[2], 6))
MH = [H[0] - M[0], H[1] - M[1], H[2] - M[2]]
print("verification : norme de MH =", round(norme(MH), 6))
test = a * H[0] + b * H[1] + c * H[2] + d
print("verification : H est dans le plan :", round(test, 10) == 0)
```

Trace d'exécution

```
Plan P : x + 2y + 3z - 1 = 0 et M(1 ; 1 ; 1)
distance de M au plan : 1.336306
projete H : 0.642857 ; 0.285714 ; -0.071429
verification : norme de MH = 1.336306
verification : H est dans le plan : True
```

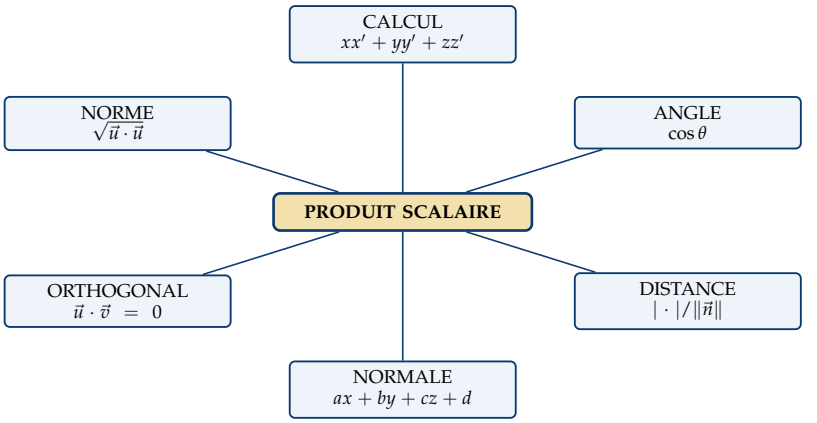
Interprétation mathématique. La distance calculée par la formule du théorème 10.11 et la longueur MH obtenue par le projeté **coïncident exactement** : $1,336306 = \dfrac{5}{\sqrt{14}}$. C'est la confirmation numérique de la définition 10.10 — le projeté orthogonal réalise la distance minimale.

Les coordonnées de H valent exactement $(\frac{9}{14}\,;\,\frac{2}{7}\,;\,-\frac{1}{14})$, car le coefficient k calculé par la fonction vaut $\frac{5}{14}$. La dernière ligne répond *True* : H appartient bien au plan, à la précision machine.

Le vecteur $\vec{MH}$ vaut $-\frac{5}{14}(1\,;\,2\,;\,3)$, c'est-à-dire un multiple du vecteur normal $\vec{n}(1\,;\,2\,;\,3)$ lu sur l'équation du plan : c'est exactement ce que signifie « projeté orthogonal ». Sa norme, $\frac{5}{14}\sqrt{14} = \frac{5}{\sqrt{14}}$, redonne la distance de la première ligne.

■ L'écriture $abs(...)$ de la fonction distance n'est pas un détail de programmation : **sans elle, on obtiendrait un nombre négatif** dès que le point est du côté où $ax + by + cz + d < 0$.

SYNTHÈSE



10.6 — Synthèse du chapitre 10

Les trois réflexes du chapitre

1. Les coefficients de l'équation cartésienne **sont** les coordonnées de la normale.
2. Orthogonales n'est pas perpendiculaires : il manque l'intersection.
3. La formule de distance exige la valeur absolue et l'équation écrite $= 0$.

EXERCICES

SÉRIE A ★

EXERCICE 327 ★

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u}(2\,;\,-1\,;\,3)$ et $\vec{v}(1\,;\,4\,;\,0)$.

EXERCICE 328 ★

Calculer $\|\vec{u}\|$ pour $\vec{u}(1\,;\,2\,;\,-2)$ puis pour $\vec{v}(3\,;\,0\,;\,4)$.

EXERCICE 329 ★

Les vecteurs $\vec{u}(1\,;\,2\,;\,-1)$ et $\vec{v}(3\,;\,-1\,;\,1)$ sont-ils orthogonaux ?

EXERCICE 330 ★

Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(1\,;\,2\,;\,0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1\,;\,-1\,;\,2)$.