Chapitre 10. Exercices corrigés

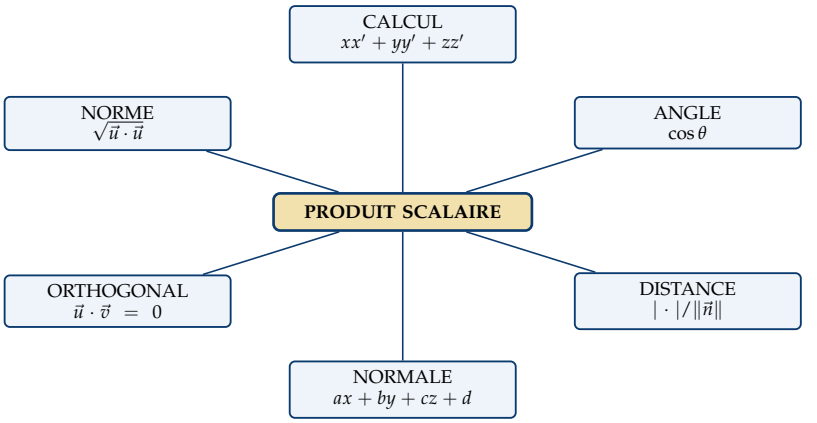
Orthogonalité et produit scalaire dans l'espace

Objectifs du chapitre — programme officiel (BO 2019)

Ce document contient. Séries d'exercices progressives, entièrement corrigées, des automatismes aux exercices de type bac.

Extrait du manuel *Math Convergence — Terminale, spécialité mathématiques*
A. Choukoukou · session 2027 · reproduit avec l'autorisation de l'auteur.

SYNTHÈSE



10.6 — Synthèse du chapitre 10

Les trois réflexes du chapitre

1. Les coefficients de l'équation cartésienne **sont** les coordonnées de la normale.
2. Orthogonales n'est pas perpendiculaires : il manque l'intersection.
3. La formule de distance exige la valeur absolue et l'équation écrite $= 0$.

EXERCICES

SÉRIE A ★

EXERCICE 327 ★

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u}(2\,;\,-1\,;\,3)$ et $\vec{v}(1\,;\,4\,;\,0)$.

EXERCICE 328 ★

Calculer $\|\vec{u}\|$ pour $\vec{u}(1\,;\,2\,;\,-2)$ puis pour $\vec{v}(3\,;\,0\,;\,4)$.

EXERCICE 329 ★

Les vecteurs $\vec{u}(1\,;\,2\,;\,-1)$ et $\vec{v}(3\,;\,-1\,;\,1)$ sont-ils orthogonaux ?

EXERCICE 330 ★

Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(1\,;\,2\,;\,0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1\,;\,-1\,;\,2)$.

EXERCICE 331 ★

Déterminer le cosinus de l'angle entre $\vec{u}(1\,;\,1\,;\,0)$ et $\vec{v}(1\,;\,0\,;\,1)$, puis la valeur de cet angle en degrés.

EXERCICE 332 ★

Calculer la distance AB avec $A(1\,;\,0\,;\,2)$ et $B(3\,;\,2\,;\,4)$.

EXERCICE 333 ★

Les droites de vecteurs directeurs $\vec{u}(2\,;\,1\,;\,-1)$ et $\vec{v}(1\,;\,-1\,;\,1)$ sont-elles orthogonales ?

EXERCICE 334 ★

Soit le plan $\mathcal{P} : 2x - y + 3z - 5 = 0$. Donner un vecteur normal à $\mathcal{P}$, puis déterminer si le point $A(1\,;\,0\,;\,1)$ lui appartient.

SÉRIE B ★★

EXERCICE 335 ★★

Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(1\,;\,0\,;\,0)$, $B(0\,;\,2\,;\,0)$ et $C(0\,;\,0\,;\,3)$.

EXERCICE 336 ★★

Calculer la distance du point $M(1\,;\,1\,;\,1)$ au plan $2x - y + 3z - 5 = 0$.

EXERCICE 337 ★★

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de $M(1\,;\,1\,;\,1)$ sur le plan $2x - y + 3z - 5 = 0$, puis vérifier que MH est égal à la distance de l'exercice 336.

EXERCICE 338 ★★

Les plans $P_1 : 2x - y + z - 3 = 0$ et $P_2 : -4x + 2y - 2z + 1 = 0$ sont-ils parallèles ? Confondus ?

EXERCICE 339 ★★

Soient $A(1\,;\,0\,;\,0)$, $B(0\,;\,1\,;\,0)$ et $C(0\,;\,0\,;\,1)$. Déterminer une mesure de l'angle BAC.

EXERCICE 340 ★★

Démontrer que la droite $d : (1 + t\,;\,2 - t\,;\,3)$ est parallèle au plan $x + y + 2z - 4 = 0$, puis préciser si elle y est incluse.

EXERCICE 341 ★★

Déterminer l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ équidistants de $A(1\,;\,0\,;\,0)$ et $B(0\,;\,1\,;\,0)$.

EXERCICE 342 ★★

Déterminer le réel m pour que $\vec{u}(2\,;\,m\,;\,-1)$ et $\vec{v}(1\,;\,3\,;\,m)$ soient orthogonaux.

SÉRIE C ★★★

EXERCICE 343 ★★★

Déterminer le projeté orthogonal H du point $M(3\,;\,1\,;\,2)$ sur la droite d : $(1+t\,;\,2t\,;\,-t)$, puis calculer la distance de M à d.

EXERCICE 344 ★★★

Soit $A(1\,;\,1\,;\,1)$ et le plan P : $6x+3y+2z-6=0$.

a. Calculer $d(A\,;\,P)$.

b. Déterminer le projeté orthogonal de A sur P.

c. Vérifier la cohérence des deux résultats.

EXERCICE 345 ★★★

ABCDEFGH est le cube du chapitre 9, exercice 312.

a. Démontrer que $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE).

b. En déduire une équation cartésienne de (BDE).

c. Calculer $d(A\,;\,(BDE))$ et $d(G\,;\,(BDE))$.

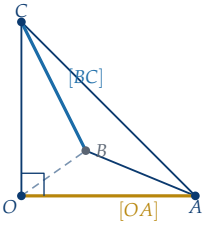
EXERCICE 346 ★★★

Soit le tétraèdre OABC avec $O(0;0;0)$, $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$.

a. Démontrer que les arêtes $[OA]$ et $[BC]$ sont orthogonales.

b. Démontrer de même pour $[OB]$ et $[AC]$, puis pour $[OC]$ et $[AB]$.

c. Un tétraèdre dont les arêtes opposées sont deux à deux orthogonales est dit **orthocentrique** (vocabulaire non exigible). Conclure.



10.7 — Le tétraèdre OABC de l'exercice 346 : les arêtes opposées $[OA]$ et $[BC]$

EXERCICE 347 ★★★

Soient $A(1\,;\,2\,;\,3)$ et $B(3\,;\,0\,;\,1)$.

a. Déterminer une équation cartésienne du **plan médiateur** de $[AB]$, c'est-à-dire l'ensemble des points équidistants de A et B.

b. Vérifier que le milieu de $[AB]$ appartient à ce plan et que $\overrightarrow{AB}$ en est un vecteur normal.

EXERCICE 348 ★★★

Discuter, selon le réel m, la position relative de la droite $d : (1+t\,;\,-t\,;\,2+mt)$ et du plan $P : x+y+z-3=0$.

EXERCICE 349 ★★★

Soit le tétraèdre OABC de l'exercice 346.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

b. Calculer la distance de O au plan (ABC).

c. Calculer l'aire du triangle ABC, puis le volume du tétraèdre par la formule $V = \frac{1}{3} \times aire \times hauteur$.

d. Vérifier par la formule directe du volume d'un tétraèdre rectangle en O.

EXERCICE 350 ★★★

★ Hors attendus — approfondissement

Déterminer une mesure de l'angle formé par les plans $P_1 : x+y=0$ et $P_2 : x+z=0$. *L'angle entre deux plans est celui de leurs vecteurs normaux, à un supplémentaire près.*

EXERCICE 351 ★★★

Déterminer la position relative de la droite $d : (1+t\,;\,2-t\,;\,t)$ et du plan $\mathcal{P} : x+y+2z-3=0$. En cas d'intersection, préciser le point.

SÉRIE D ★★★★

EXERCICE 352 ★★★★

ABCDEFGH est le cube du chapitre 9. Soit I le milieu de $[BF]$ et J le milieu de $[GH]$.

a. Donner les coordonnées de I et J.

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (AIJ).

c. Déterminer l'intersection de ce plan avec la droite (EC).

d. Calculer la distance de D au plan (AIJ).

EXERCICE 353 ★★★★

Soit $M(2\,;\,1\,;\,0)$ et la droite $d : (t\,;\,t\,;\,t)$.

a. Exprimer MK^2 en fonction de t, où K est le point de d de paramètre t.

b. Déterminer le minimum de cette expression et la valeur de t correspondante.

c. Vérifier que le point obtenu est bien le projeté orthogonal de M sur d.

EXERCICE 354 ★★★★

Dans le cube du chapitre 9, on considère le tétraèdre ACFH.

a. Calculer les six longueurs d'arêtes de ce tétraèdre.

b. En déduire sa nature.

c. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AF})$.

EXERCICE 355 ★★★★

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point $M(3\,;\,1\,;\,-1)$ sur le plan $\mathcal{P} : x - 2y + 2z - 1 = 0$, puis calculer MH de deux façons différentes.

SÉRIE E ★★★★★

EXERCICE 356 ★★★★★

Soit ABCD un tétraèdre tel que $[AB] \perp [CD]$ et $[AC] \perp [BD]$. Démontrer qu'alors $[AD] \perp [BC]$. *On pourra poser* $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ *et traduire les hypothèses.*

EXERCICE 357 ★★★★★

hors attendus du programme

Distance entre deux droites non coplanaires. Soient $d_1 : (t\,;\,0\,;\,0)$ et $d_2 : (0\,;\,1\,;\,s)$.

a. Vérifier que ces droites ne sont pas coplanaires.

b. Soient $M(t\,;\,0\,;\,0)$ sur d_1 et $N(0\,;\,1\,;\,s)$ sur d_2. Exprimer MN^2 en fonction de t et s.

c. Déterminer le minimum de MN^2 et en déduire la distance entre les deux droites.

d. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ réalisant ce minimum est orthogonal aux deux droites.

EXERCICE 358 ★★★★★

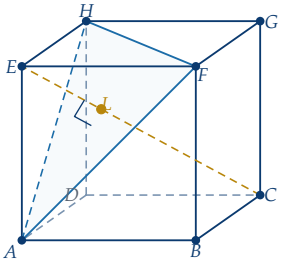
$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1, muni du repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (AFH).

b. Calculer la distance du sommet G à ce plan.

c. Démontrer que la droite (CE) est perpendiculaire au plan (AFH).

d. Retrouver le résultat de la question **b** sans utiliser la formule de la distance.



10.8 — Le cube de l'exercice 358 : le plan (AFH) et la droite (CE)

EXERCICE 359 ★★★★★

Soit d la droite passant par $A(1\,;\,0\,;\,2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2\,;\,1\,;\,-2)$, et soit $M(3\,;\,2\,;\,1)$.

a. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur d.

b. En déduire la distance de M à d.

c. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par M et perpendiculaire à d.