Chapitre 11. Cours

Combinatoire et dénombrement

Objectifs du chapitre — programme officiel (BO 2019)

Ce document contient. Cours complet : définitions, propriétés et démonstrations exigibles, fiches méthodes guidées, exemples résolus et synthèse du chapitre.

Extrait du manuel *Math Convergence — Terminale, spécialité mathématiques*
A. Choukoukou · session 2027 · reproduit avec l'autorisation de l'auteur.

CHAPITRE

11

COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

Un seul réflexe à acquérir : l'ordre compte-t-il ? les répétitions sont-elles permises ? *Deux questions, quatre situations, quatre formules. Tout le reste en découle.*

Objectifs. Dénombrer à l'aide des principes additif et multiplicatif · reconnaître et dénombrer k-uplets, k-uplets d'éléments distincts, permutations et combinaisons · calculer et interpréter les coefficients binomiaux · utiliser la relation de Pascal · démontrer par dénombrement que $\sum \binom{n}{k} = 2^n$.

Compétences travaillées. Modéliser (dominante) · Calculer · Raisonner

Prérequis. Chapitre 1 : ensembles, produit cartésien, cardinal · notation factorielle · calcul littéral.

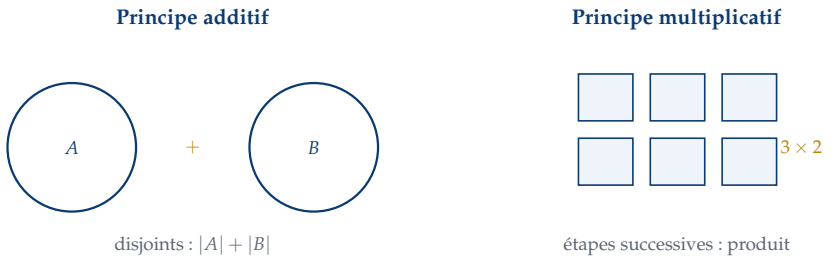
Diagnostic express.

1. Combien de menus peut-on composer avec 3 entrées, 4 plats et 2 desserts ?
2. Calculer $5!$.
3. De combien de façons peut-on ranger 4 livres distincts sur une étagère ?
4. Développer $(a+b)^2$ puis $(a+b)^3$.
5. Combien y a-t-il de codes à 3 chiffres, chiffres pouvant se répéter ?

Corrigé en fin de chapitre.

COURS

1. Cardinal et principes de dénombrement



11.1 — Principe additif et principe multiplicatif

Définition 11.1. Le **cardinal** d'un ensemble fini E, noté $\mathrm{Card}(E)$, est son nombre d'éléments.

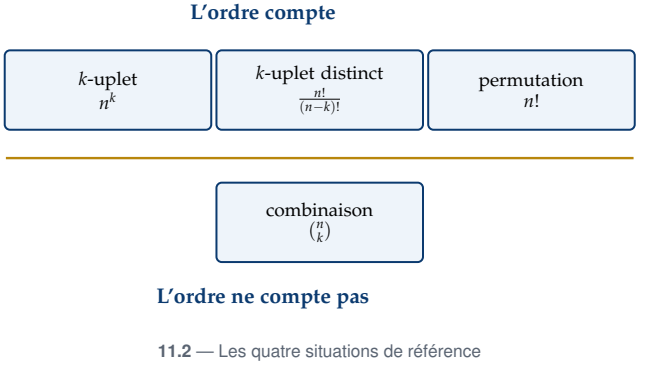
Principe additif. Si A et B sont disjoints : $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.
Dans le cas général : $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$.

Principe multiplicatif. Un choix en p étapes successives, offrant respectivement n_1, n_2, …, n_p possibilités, se fait de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$ façons.

Complémentaire. $\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$.

➤ **Bon réflexe.** « **Et** » appelle une multiplication, « **ou** » une addition. Cette traduction règle la moitié des exercices avant tout calcul.

2. Les quatre situations de référence



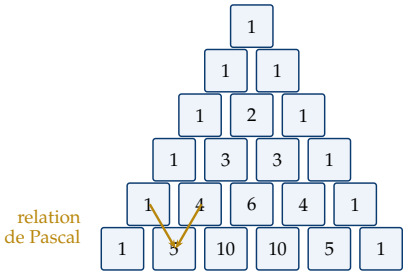
11.2 — Les quatre situations de référence

Situation	Ordre	Répétition	Nombre
p-uplet	oui	oui	n^p
p-uplet d'éléments distincts	oui	non	$\dfrac{n!}{(n-p)!}$
Permutation ($p = n$)	oui	non	$n!$
Combinaison	non	non	$\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

Identifier le bon modèle.
1. L'ordre compte-t-il ? Un podium oui, un comité non.
2. Peut-on répéter un élément ? Un code oui, un tirage simultané non.
3. Croiser les deux réponses dans le tableau.

■ **Erreur à éviter.** Confondre arrangement et combinaison. « Choisir un président **et** un trésorier » ordonne les rôles ; « choisir deux délégués » ne les ordonne pas. Le rapport entre les deux comptes est exactement $p!$.

3. Propriétés des coefficients binomiaux



11.3 — Le triangle de Pascal

Théorème 11.2. Pour $0 \leqslant p \leqslant n$:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Théorème 11.3 (relation de Pascal). Pour $0 \leqslant p < n$:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Interprétation. Pour former une partie à $p+1$ éléments parmi $n+1$, on distingue selon qu'elle contient ou non un élément fixé : c'est la démonstration par dénombrement.

➤ **Astuce.** La symétrie $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ divise les calculs par deux. Pour $\binom{20}{18}$, calculez $\binom{20}{2} = 190$: trois secondes au lieu de trois minutes.

4. Somme des coefficients binomiaux

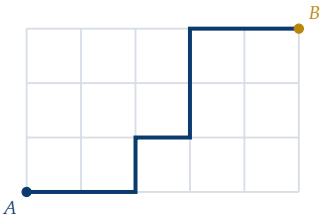
Théorème 11.4. Pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

Démonstration par dénombrement. Un ensemble à n éléments possède 2^n parties, chacune obtenue en décidant pour chaque élément s'il y figure. En les classant par cardinal, on retrouve la somme.

➤ **Bon réflexe.** Cette identité se lit sur le triangle de Pascal : la somme de chaque ligne double à chaque étage. C'est le contrôle le plus rapide d'un triangle recopié.

5. Approfondissements facultatifs



$\binom{8}{3} = 56$ chemins : choisir la place des 3 montées parmi 8 pas

11.4 — Chemins sur un quadrillage : chaque trajet est un mot

★ Le **binôme de Newton** $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$ et la méthode des **étoiles et barres** dépassent les attendus du baccalauréat. Ils éclairent le chapitre sans être exigibles.

MÉTHODES

Méthode 1 — Choisir le bon modèle

1. Identifier l'ensemble de départ et son cardinal n.
2. Déterminer combien d'éléments on prélève : p.
3. L'ordre compte-t-il ? Peut-on répéter ?
4. Appliquer la formule correspondante, et **justifier le choix** en une phrase.

Exemple éclair. Un podium parmi 10 coureurs : ordre oui, répétition non, donc $10 \times 9 \times 8 = 720$.

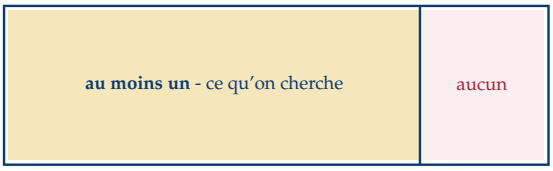
➤ **Bon réflexe.** La phrase de justification vaut autant que le calcul. Écrivez « il s'agit d'une combinaison, l'ordre du comité étant sans importance » : c'est un point de barème à chaque question.

Méthode 2 — Dénombrer par le complémentaire

Quand. L'énoncé contient « **au moins un** ». Compter directement obligerait à distinguer un, deux, trois cas…

1. Compter le **total** sans contrainte.
2. Compter les cas **contraires** — « au moins un » a pour contraire « aucun ».
3. Soustraire.
4. Vérifier la vraisemblance : le résultat doit être inférieur au total.

➤ **Astuce.** « Au moins un » → contraire « aucun ». « Au plus deux » → contraire « au moins trois ». Le passage au complémentaire transforme presque toujours une somme de cas en une seule soustraction.



total − contraire : un seul calcul au lieu de quatre

11.5 — Compter par le complémentaire

Méthode 3 — Utiliser la relation de Pascal

1. Repérer deux coefficients de même « étage » n et de rangs consécutifs.
2. Appliquer $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.
3. Pour une démonstration, revenir aux factorielles et réduire au même dénominateur.
4. Pour un calcul, s'appuyer sur le triangle plutôt que sur les factorielles.

Méthode 4 — Dénombrer avec contrainte de composition

Quand. On impose la composition du prélèvement : « exactement deux rouges », « trois femmes et deux hommes ».

1. Séparer la population en catégories.
2. Choisir dans chaque catégorie indépendamment.
3. **Multiplier** les nombres obtenus — c'est un « et ».
4. Si plusieurs compositions conviennent, additionner les cas.

Exemple éclair. Exactement 2 rouges parmi 5 rouges et 4 bleues, en tirant 3 boules : $\binom{5}{2} \times \binom{4}{1} = 10 \times 4 = 40$.

■ **Erreur à éviter.** Oublier de choisir dans la seconde catégorie. Tirer trois boules dont exactement deux rouges impose aussi de choisir la troisième parmi les bleues : le facteur $\binom{4}{1}$ n'est pas facultatif.

Méthode 5 — Dénombrer avec contrainte de regroupement

Quand. Certains éléments doivent rester ensemble, ou au contraire être séparés.

1. Traiter le groupe imposé comme un **élément unique**.
2. Permuter les objets ainsi obtenus.
3. Multiplier par les permutations **internes** au groupe.
4. Pour une séparation imposée, passer par le complémentaire.

➤ **Astuce.** Trois personnes devant rester côte à côte parmi six : on permute 4 objets, soit 4!, puis les trois entre elles, soit 3!. Total $4! \times 3! = 144$.

Méthode 6 — Compter des chemins

Quand. Déplacements sur une grille, arbres de choix, mots formés de deux lettres répétées.

1. Traduire chaque chemin en une **suite de symboles** — par exemple D pour droite, H pour haut.
2. Constater que tous les chemins ont la **même longueur**.
3. Compter revient à choisir les positions d'un des deux symboles : $\binom{n}{p}$.
4. Pour un passage imposé, découper le trajet et multiplier ; pour un point interdit, passer au complémentaire.

➤ **Bon réflexe.** Cette méthode est le pont vers le chapitre 12 : compter les chemins d'un arbre menant à k succès parmi n répétitions, c'est exactement $\binom{n}{k}$.

ERREURS FRÉQUENTES ET BONS RÉFLEXES

■ Erreur	✓ Bon réflexe
Confondre $\binom{n}{k}$ et $n!/(n-k)!$	Le coefficient binomial **divise en plus** par $k!$: il efface l'ordre
Appliquer une formule sans décrire un résultat	Méthode 1, étape 1, toujours
Compter « au moins un » directement	Passer par le complémentaire
Additionner quand il faut multiplier	On **additionne** des cas disjoints, on **multiplie** des étapes successives
Oublier les rangements internes d'un bloc	Méthode 5, étape 3
Écrire $\binom{n}{k}$ pour $k > n$	Ce coefficient vaut 0 : on ne peut pas choisir plus d'éléments qu'il n'y en a

MODULE PYTHON — TRIANGLE DE PASCAL ET COMBINAISONS

```
# Triangle de Pascal et combinaisons

def triangle_pascal(n_max):
    # construction ligne par ligne avec la relation de Pascal
    ligne = [1]
    for n in range(n_max + 1):
        print("n =", n, ":", ligne, " somme =", sum(ligne))
        nouvelle = [1]
        for i in range(len(ligne) - 1):
            nouvelle.append(ligne[i] + ligne[i + 1])
        nouvelle.append(1)
        ligne = nouvelle

def combinaison(n, p):
    # calcul par la formule multiplicative, sans factorielle
```

```
    resultat = 1
    for i in range(p):
        resultat = resultat * (n - i) // (i + 1)
    return resultat

triangle_pascal(6)
print()
print("C(5, 3) =", combinaison(5, 3), " C(10, 4) =", combinaison(10, 4))
print("C(49, 6) =", combinaison(49, 6), "(grilles du loto)")
```

Trace d'exécution

```
n = 0 : [1] somme = 1
n = 1 : [1, 1] somme = 2
n = 2 : [1, 2, 1] somme = 4
n = 3 : [1, 3, 3, 1] somme = 8
n = 4 : [1, 4, 6, 4, 1] somme = 16
n = 5 : [1, 5, 10, 10, 5, 1] somme = 32
n = 6 : [1, 6, 15, 20, 15, 6, 1] somme = 64

C(5, 3) = 10 C(10, 4) = 210
C(49, 6) = 13983816 (grilles du loto)
```

Interprétation mathématique. La colonne des sommes donne $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$, soit 2^n : c'est la vérification numérique du théorème 11.4. La seconde partie calcule des combinaisons par la **formule multiplicative**, sans jamais former de factorielle : on obtient $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$, le nombre de grilles du loto, en une boucle de six produits.

> **Remarque.** La fonction `triangle_pascal` n'emploie aucune factorielle : elle n'utilise que la relation de Pascal. C'est ainsi que les coefficients binomiaux se calculent en pratique, les factorielles devenant vite gigantesques.

SYNTHÈSE

Les trois réflexes du chapitre

1. Décrire un résultat avant de choisir une formule.
2. « Au moins un » se compte par « aucun ».
3. On additionne des cas disjoints, on multiplie des étapes successives.