Chapitre 12. Cours

Épreuves successives et loi binomiale

Objectifs du chapitre — programme officiel (BO 2019)

Ce document contient. Cours complet : définitions, propriétés et démonstrations exigibles, fiches méthodes guidées, exemples résolus et synthèse du chapitre.

Extrait du manuel *Math Convergence — Terminale, spécialité mathématiques*
A. Choukoukou · session 2027 · reproduit avec l'autorisation de l'auteur.

CHAPITRE

12

ÉPREUVES SUCCESSIVES, SCHÉMA DE BERNOULLI ET LOI BINOMIALE

Les coefficients binomiaux du chapitre 11 comptaient des chemins. Ils vont maintenant peser des probabilités — et le décompte des chemins d'un arbre devient la loi la plus utilisée de toutes les mathématiques appliquées.

Objectifs. Utiliser probabilités conditionnelles, arbres et formule des probabilités totales · modéliser une succession d'épreuves indépendantes · reconnaître un schéma de Bernoulli · calculer avec la loi binomiale · déterminer espérance, variance et écart-type · résoudre un problème de seuil.

Compétences travaillées. Modéliser (dominante) · Calculer · Raisonner

Prérequis. Chapitre 11 : coefficients binomiaux, dénombrement de chemins · probabilités conditionnelles et indépendance de Première · chapitre 5 : logarithme, pour les seuils.

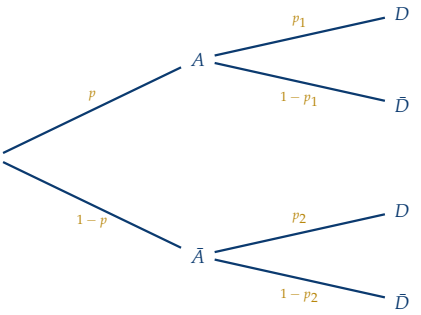
Diagnostic express.

1. Que vaut $\binom{5}{2}$?
2. On lance un dé équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
3. Que vaut $P(A) + P(\overline{A})$?
4. Deux événements indépendants : comment calcule-t-on $P(A \cap B)$?
5. Calculer $0,3^2 \times 0,7$.

Corrigé en fin de chapitre.

COURS

1. Probabilités conditionnelles — rappels



12.1 — Arbre pondéré et probabilités totales

Définition 12.1. Pour $P(A) \neq 0$, la probabilité de B **sachant** A est

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Formule des probabilités totales. Si $A_1, \ldots, A_n$ forment une partition de l'univers :

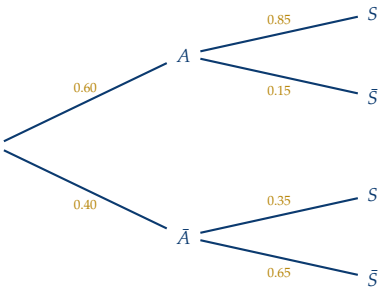
$$P(B) = P(A_1 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + \cdots + P(A_n)P_{A_n}(B)$$

Définition 12.2. A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

➤ **Bon réflexe.** Sur un arbre pondéré, on **multiplie** le long d'un chemin et l'on **additionne** les chemins qui mènent au même événement. Ces deux gestes suffisent à presque tout le chapitre.

■ **Erreur à éviter.** Confondre $P_A(B)$ et $P(A \cap B)$. La première est une probabilité **dans l'univers réduit à** A ; la seconde se rapporte à l'univers entier. Le rapport entre les deux est $P(A)$.

2. Succession d'épreuves indépendantes

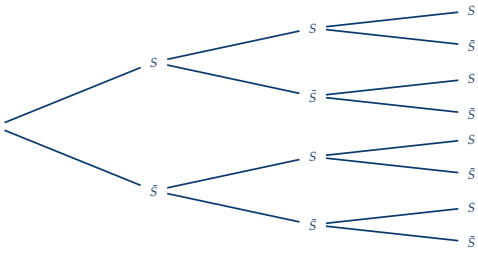


12.2 — Arbre pondéré à deux niveaux

Définition 12.3. Une **succession de n épreuves indépendantes** est une expérience où chaque épreuve se déroule dans les mêmes conditions, sans que son résultat dépende des précédents.

La probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

3. Épreuve et schéma de Bernoulli



$2^3 = 8$ chemins ; $\binom{3}{k}$ en comptent k succès

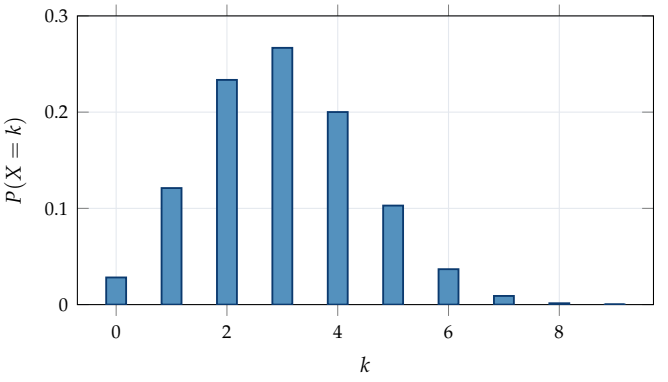
12.3 — Un schéma de Bernoulli à trois répétitions

Définition 12.4. Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience à deux issues : le **succès**, de probabilité p, et l'échec, de probabilité $1 - p$.
Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et **indépendantes**.

Vérifier qu'on a bien un schéma de Bernoulli — trois conditions.
1. Chaque épreuve n'a que **deux** issues.
2. Les épreuves sont **identiques** : p ne change pas.
3. Les épreuves sont **indépendantes**.

■ **Erreur à éviter.** Un tirage **sans remise** viole la deuxième et la troisième condition : la composition de l'urne change. Ce n'est pas un schéma de Bernoulli, et la loi binomiale ne s'applique pas.

4. Loi binomiale



12.4 — Loi binomiale $\mathcal{B}(10\,;0{,}3)$

Définition 12.5. Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, la variable aléatoire X comptant le nombre de succès suit la **loi binomiale** $\mathcal{B}(n\,;\,p)$.

Théorème 12.6. Pour tout entier k compris entre 0 et n :

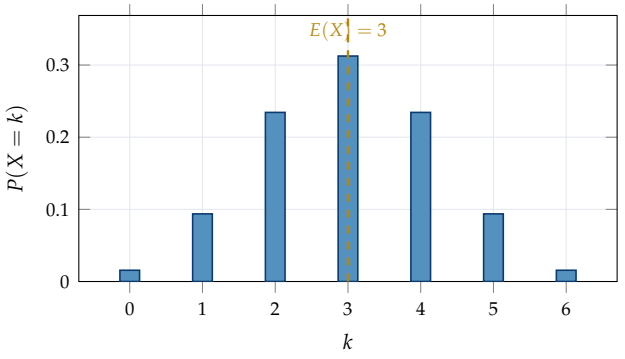
$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k\,(1-p)^{n-k}$$

Lecture de la formule. $\binom{n}{k}$ compte les **chemins** de l'arbre menant à k succès ; $p^k(1-p)^{n-k}$ est la probabilité d'un chemin. C'est exactement le dénombrement du chapitre 11.

Théorème 12.7 (espérance, variance, écart-type). Si X suit $\mathcal{B}(n\,;\,p)$:

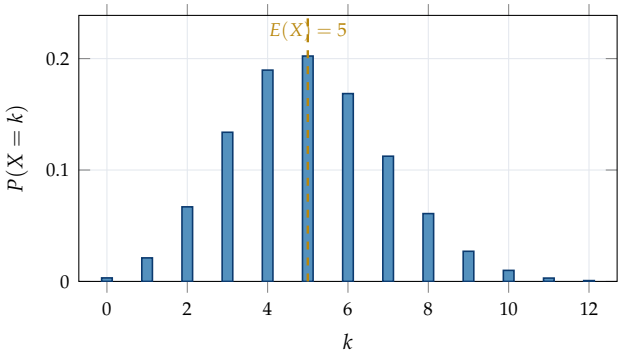
$$E(X)=np \qquad V(X)=np(1-p) \qquad \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$$

➤ **Interprétation.** $E(X)=np$ est le nombre **moyen** de succès sur un grand nombre de répétitions de l'expérience entière. Sur 200 lancers d'une pièce équilibrée, on attend 100 piles.



12.5 — Loi binomiale $\mathcal{B}(6\,;0{,}5)$: les coefficients de Pascal

5. Calculs pratiques



12.6 — Loi $\mathcal{B}(20\,;0{,}25)$

Les trois formulations à traduire.

$$P(X \leqslant k) \quad \textbf{probabilité cumulée} \qquad P(X > k) = 1 - P(X \leqslant k)$$

$$P(X \geqslant k) = 1 - P(X \leqslant k-1)$$

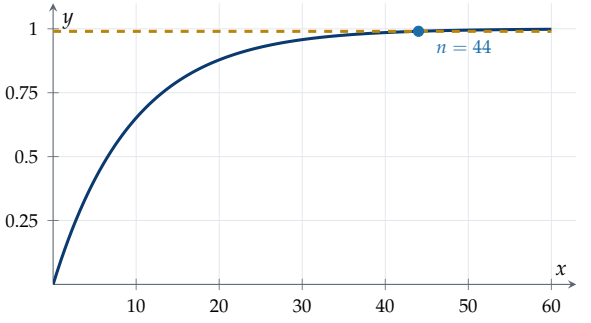
■ **Erreur à éviter.** Le décalage d'une unité entre $P(X \geqslant k)$ et $1 - P(X \leqslant k)$. La bonne écriture est $1 - P(X \leqslant k-1)$: la valeur k elle-même appartient à l'événement.

➤ **Astuce.** « Au moins un succès » se calcule toujours par le complémentaire :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^n$$

Un seul terme au lieu de n.

6. Problèmes de seuil



12.7 — « Au moins un succès » : $1-(1-p)^n$

1. Traduire l'énoncé en une inégalité portant sur n.
2. Se ramener à $(1-p)^n < s$ lorsque la question porte sur « au moins un succès ».
3. Appliquer le logarithme, puis diviser par $\ln(1-p)$ en **changeant le sens**, ce coefficient étant négatif.
4. Conclure par le plus petit entier convenable et **vérifier** sur n et $n-1$.

➤ **Bon réflexe.** Le calcul par logarithme et l'algorithme de seuil doivent donner le même entier. Quand les deux sont demandés, c'est une vérification gratuite.

MÉTHODES

Méthode 1 — Exploiter un arbre pondéré

1. Construire l'arbre : une branche par issue, pondérée par sa probabilité.
2. Vérifier que la somme des probabilités partant d'un même nœud vaut 1.
3. **Multiplier** le long d'un chemin pour obtenir la probabilité d'une intersection.
4. **Additionner** les chemins menant au même événement — c'est la formule des probabilités totales.

■ **Erreur à éviter.** Les probabilités portées sur les branches de deuxième niveau sont **conditionnelles**. Écrire $P(B)$ au lieu de $P_A(B)$ fausse toute la suite.

Méthode 2 — Reconnaître un schéma de Bernoulli

1. Nommer l'épreuve élémentaire et son succès.
2. Vérifier les **trois** conditions : deux issues, épreuves identiques, indépendance.
3. Nommer la variable aléatoire et dire ce qu'elle compte.
4. Conclure : « X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,p)$ ».

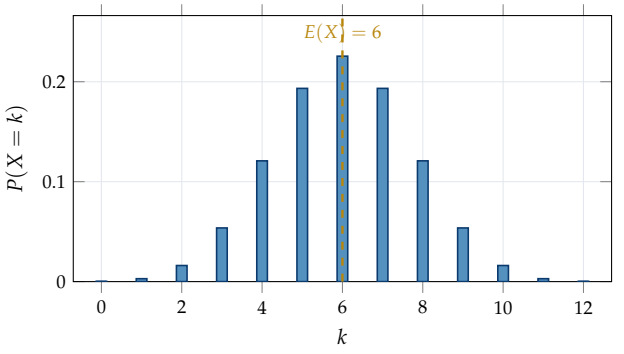
➤ **Bon réflexe.** Cette identification vaut souvent 1,5 point à elle seule, et conditionne tout le reste de l'exercice. Ne l'expédiez pas en une ligne.

Méthode 3 — Calculer une probabilité binomiale

1. Identifier n, p et la valeur k demandée.
2. Traduire l'énoncé : « exactement », « au moins », « au plus ».
3. Appliquer la formule, ou la calculatrice pour les probabilités cumulées.
4. Arrondir **à la précision demandée**, en donnant l'écriture exacte au préalable.

Exemple éclair. $X \sim \mathcal{B}(5\,;\,0{,}3)$: $P(X=2) = \binom{5}{2} \times 0{,}3^2 \times 0{,}7^3 = 10 \times 0{,}09 \times 0{,}343 \approx 0{,}309$.

Méthode 4 — Utiliser espérance et écart-type

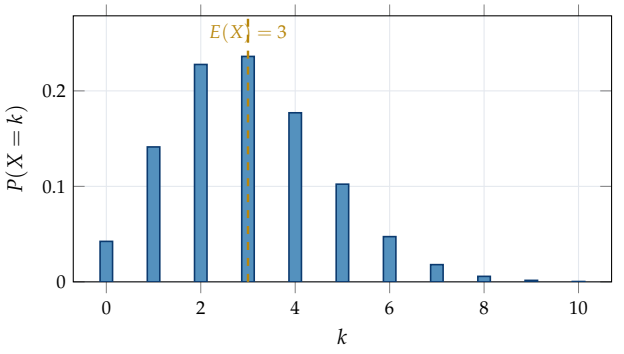


12.8 — Loi $\mathcal{B}(12\,;0{,}5)$ - symétrique

1. Vérifier que X suit bien une loi binomiale.
2. Appliquer $E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.
3. Interpréter dans le contexte : nombre moyen de succès, dispersion autour de cette moyenne.
4. Ne pas confondre variance et écart-type : l'écart-type est la racine.

➤ **Astuce.** L'espérance se calcule en une opération. Si vous obtenez une valeur hors de $[0\,;\,n]$, l'erreur est dans les paramètres, pas dans la formule.

Méthode 5 — Résoudre un problème de seuil



12.9 — Loi $\mathcal{B}(30\,;0{,}1)$ - asymétrique

1. Traduire la question en inégalité, en passant par le complémentaire si elle porte sur « au moins un ».
2. Obtenir $(1-p)^n < s$.
3. Appliquer le logarithme et diviser par $\ln(1-p) < 0$, en **inversant** l'inégalité.
4. Prendre le plus petit entier convenable et vérifier sur deux entiers consécutifs.

■ **Erreur à éviter.** Oublier l'inversion du sens. $\ln(1-p)$ est **toujours** négatif puisque $0 < 1-p < 1$. L'erreur donne une réponse plausible et fausse.

Méthode 6 — Justifier une modélisation, ou la réfuter

Quand. L'énoncé demande si la loi binomiale s'applique, ou propose une situation qui n'en relève pas.

1. Reprendre les trois conditions une par une.
2. Pour un tirage, distinguer **avec** et **sans** remise : sans remise, p change à chaque tirage.
3. Si l'une des conditions tombe, le dire explicitement et nommer laquelle.
4. Le cas échéant, proposer le modèle correct — arbre pondéré, ou dénombrement direct.

➤ **Bon réflexe.** Un grand nombre d'exercices de baccalauréat commencent par une question de modélisation. Répondre « oui, c'est une loi binomiale » sans vérifier les trois conditions ne rapporte rien, même quand la réponse est juste.

ERREURS FRÉQUENTES ET BONS RÉFLEXES

■ Erreur	✓ Bon réflexe
Appliquer la loi binomiale à un tirage sans remise	L'indépendance est perdue
Écrire $P(X \geqslant 4) = 1 - P(X \leqslant 4)$	C'est $1 - P(X \leqslant 3)$
Oublier le coefficient $\binom{n}{k}$	Il compte les chemins, il ne se devine pas
Confondre n et k dans la formule	n est le nombre de répétitions, k celui des succès
Ne pas vérifier les trois conditions du schéma	Elles font partie de la rédaction attendue
Oublier d'inverser l'inégalité en divisant par $\ln(1-p)$	Ce logarithme est négatif

MODULE PYTHON — SIMULATION D'UN SCHÉMA DE BERNOULLI

```
# Simulation d'un schema de Bernoulli
from random import random

def combinaison(n, p):
    resultat = 1
    for i in range(p):
        resultat = resultat * (n - i) // (i + 1)
    return resultat

def simule_binomiale(n, p, nb_essais):
    # renvoie la liste des frequences observees de X = 0, 1, ..., n
    effectifs = []
    for k in range(n + 1):
        effectifs.append(0)
    for essai in range(nb_essais):
        succes = 0
```

```
        for i in range(n):
            if random() < p:
                succes = succes + 1
        effectifs[succes] = effectifs[succes] + 1
    frequences = []
    for k in range(n + 1):
        frequences.append(effectifs[k] / nb_essais)
    return frequences

def proba_binomiale(n, p, k):
    return combinaison(n, k) * p ** k * (1 - p) ** (n - k)

n = 10
p = 0.3
print("Loi B(10 ; 0.3) : simulation sur 10 000 essais")
frequences = simule_binomiale(n, p, 10000)
for k in range(7):
    proba = proba_binomiale(n, p, k)
    f = round(frequences[k], 4)
    print("k =", k, " frequence :", f, " proba :", round(proba, 4))
print("esperance theorique n*p =", n * p)
print("ecart-type theorique =", round((n * p * (1 - p)) ** 0.5, 6))
```

Trace d'exécution *(les fréquences varient d'une exécution à l'autre)*

```
Loi B(10 ; 0.3) : simulation sur 10 000 essais
k = 0 frequence : 0.0279 proba : 0.0282
k = 1 frequence : 0.1185 proba : 0.1211
k = 2 frequence : 0.2356 proba : 0.2335
k = 3 frequence : 0.2673 proba : 0.2668
k = 4 frequence : 0.2002 proba : 0.2001
k = 5 frequence : 0.1029 proba : 0.1029
k = 6 frequence : 0.0365 proba : 0.0368
esperance theorique n*p = 3.0
ecart-type theorique = 1.449138
```

Interprétation mathématique. Sur les sept premières valeurs, les fréquences observées en 10 000 essais approchent les probabilités théoriques à quelques millièmes près, et le mode de la loi est atteint en $k = 3$ sur les deux colonnes — ce qui coïncide avec l'espérance $np = 3$ rappelée en avant-dernière ligne. Relancez le programme : les fréquences changent à chaque exécution, les probabilités jamais. C'est toute la différence entre une observation et un calcul.

■ **Une simulation ne démontre rien.** Elle illustre la loi et rend crédible la formule du théorème 12.6, mais les écarts observés varient à chaque exécution. La justification de cette convergence — pourquoi les fréquences se rapprochent des probabilités — est précisément l'objet du **chapitre 14**.

SYNTHÈSE

Les trois réflexes du chapitre

1. Vérifier les **trois conditions** du schéma de Bernoulli — deux issues, épreuves identiques, indépendance — avant d'écrire $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,p)$.
2. Écrire la formule $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ en identifiant n, p et k.
3. Penser au **complémentaire** : $P(X \geqslant 1)=1-(1-p)^n$, un seul terme au lieu de n.

EXERCICES

SÉRIE A ★

EXERCICE 388 ★

$P(A)=0,6$, $P_A(B)=0,8$ et $P_{\overline{A}}(B)=0,3$. Calculer $P(B)$.

EXERCICE 389 ★

On lance 10 fois un dé équilibré. Soit X le nombre de 6 obtenus. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

EXERCICE 390 ★

$X \sim \mathcal{B}(5\,;\,\frac{1}{2})$. Calculer $P(X=2)$ sous forme de fraction irréductible.

EXERCICE 391 ★

$X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0,4)$. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

EXERCICE 392 ★

Dans une urne contenant 5 boules rouges et 3 bleues, on tire 4 boules **sans remise**. Le nombre de boules rouges obtenues suit-il une loi binomiale ? Justifier.

EXERCICE 393 ★

Soit X suivant $\mathcal{B}(6\,;\,0{,}3)$. Calculer $P(X \geqslant 1)$.