Chapitre 13. Cours

Sommes de variables aléatoires

Objectifs du chapitre — programme officiel (BO 2019)

Ce document contient. Cours complet : définitions, propriétés et démonstrations exigibles, fiches méthodes guidées, exemples résolus et synthèse du chapitre.

Extrait du manuel *Math Convergence — Terminale, spécialité mathématiques*
A. Choukoukou · session 2027 · reproduit avec l'autorisation de l'auteur.

CHAPITRE

13

SOMMES DE VARIABLES ALÉATOIRES ET ÉCHANTILLONNAGE

Une seule idée : l'espérance s'additionne toujours, la variance s'additionne quand les variables sont indépendantes. De ces deux lignes découlent la loi binomiale, la précision d'un sondage, et la raison pour laquelle une moyenne est plus fiable qu'une observation isolée.

Objectifs. Calculer l'espérance et la variance d'une transformation affine · utiliser la linéarité de l'espérance · additionner les variances de variables indépendantes · modéliser un échantillon · déterminer espérance et variance d'une somme et d'une moyenne.

Compétences travaillées. Calculer (dominante) · Modéliser · Raisonner

Prérequis. Chapitre 12 : loi binomiale, indépendance · variables aléatoires de Première : loi, espérance, variance.

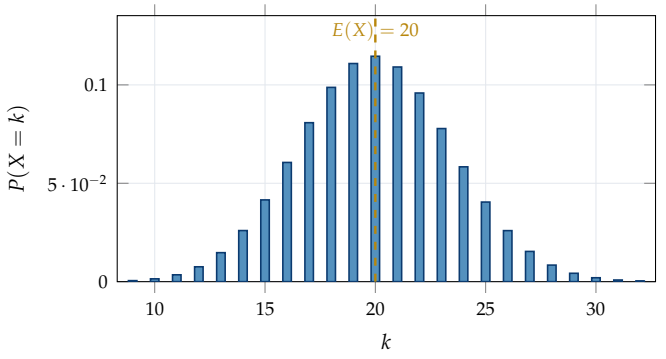
Diagnostic express.

1. Une variable prend les valeurs 0 et 1 avec probabilités $0,7$ et $0,3$. Calculer son espérance.
2. Que vaut $V(X)$ si $E(X) = 2$ et $E(X^2) = 6$?
3. $X \sim \mathcal{B}(20\,;\,0,5)$. Que vaut $E(X)$?
4. Calculer $\sqrt{\frac{35}{12}}$ à 10^{-3} près.
5. Si on divise un nombre par 100, que devient son carré ?

Corrigé en fin de chapitre.

COURS

1. Rappels sur une variable aléatoire



13.1 — Loi $\mathcal{B}(50\,;0{,}4)$

Si X prend les valeurs $x_1, \ldots, x_k$ avec les probabilités $p_1, \ldots, p_k$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i\, x_i \qquad V(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2 \qquad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

➤ **Bon réflexe.** La formule $V(X) = E(X^2) - \mu^2$ est presque toujours plus rapide que la définition par les écarts. Calculez $E(X^2)$ en élevant les **valeurs** au carré, jamais les probabilités.

2. Transformation affine

$E(aX+b) = aE(X)+b$	$V(aX+b) = a^2V(X)$	$\sigma(aX+b) = \lvert a\rvert\,\sigma(X)$

b disparaît de la dispersion ; a passe au carré

13.2 — Effet d'une transformation affine

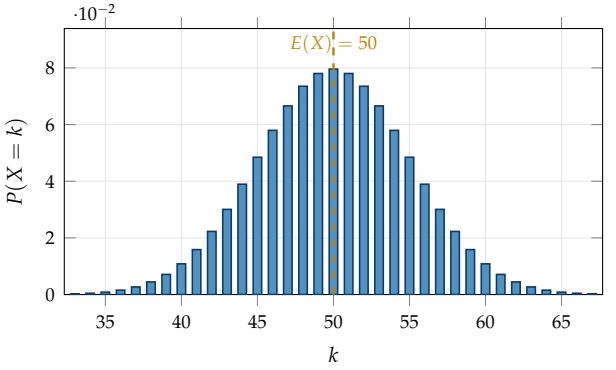
Théorème 13.1. Pour tous réels a et b :

$$E(aX+b) = a\,E(X) + b \qquad V(aX+b) = a^2\,V(X) \qquad \sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X)$$

Lecture. Le décalage b translate la moyenne sans changer la dispersion ; le facteur a dilate les deux, mais la variance suit le **carré**.

■ **Erreur à éviter.** Écrire $V(aX+b) = a\,V(X) + b$. La variance ignore b et récupère a^2 : c'est la conséquence directe de sa définition par des carrés d'écarts.

3. Somme de deux variables aléatoires



13.3 — Loi $\mathcal{B}(100\,;0{,}5)$ - la cloche apparaît

Théorème 13.2 (linéarité de l'espérance). Pour toutes variables X et Y :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

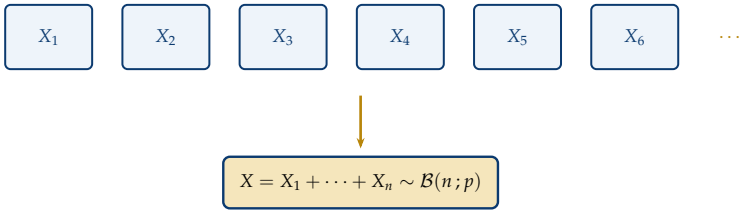
Théorème 13.3. Si X et Y sont **indépendantes** :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

■ **Erreur à éviter.** L'espérance est linéaire **sans condition** ; la variance n'est additive que sous l'hypothèse d'**indépendance**. Oublier de la vérifier est l'erreur la plus coûteuse du chapitre.

➤ **Astuce.** Les écarts-types, eux, ne s'additionnent **jamais** : $\sigma(X+Y) = \sqrt{V(X)+V(Y)}$, ce qui est strictement inférieur à $\sigma(X)+\sigma(Y)$. Les dispersions se compensent partiellement.

4. Application à la loi binomiale



13.4 — La binomiale, somme de n Bernoulli

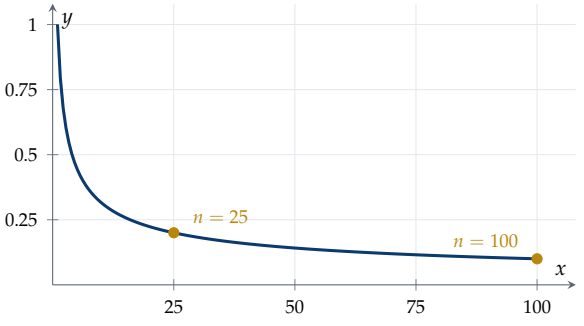
Une variable X suivant $\mathcal{B}(n\,;\,p)$ s'écrit comme la somme de n variables de Bernoulli indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de paramètre p.

Démonstration des formules. Chaque X_i vérifie $E(X_i) = p$ et $V(X_i) = p(1-p)$. Par linéarité et additivité :

$$E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p)$$

➤ **Ce qu'il faut voir.** Les formules du chapitre 12, admises alors, se **démontrent** ici en trois lignes. C'est une démonstration exigible, et la décomposition en somme est l'outil qui la rend possible.

5. Échantillon



13.5 — L'écart-type de la moyenne décroît en $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Définition 13.4. Un **échantillon** de taille n est une suite $X_1, \ldots, X_n$ de variables aléatoires **indépendantes et de même loi**, d'espérance μ et de variance V.

On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $M_n = \dfrac{S_n}{n}$, la **moyenne empirique**.

Théorème 13.5.

$$E(S_n) = n\mu \quad V(S_n) = nV \quad \sigma(S_n) = \sqrt{n}\,\sigma$$

$$E(M_n) = \mu \quad V(M_n) = \frac{V}{n} \quad \sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Le résultat central. La moyenne empirique a la même espérance que chaque terme, mais un écart-type divisé par $\sqrt{n}$.

➤ **À retenir.** C'est la racine, pas n lui-même. Diviser la dispersion par deux exige de **quadrupler** l'échantillon. Tout le chapitre 14 découle de cette formule.

■ **Erreur à éviter.** Confondre S_n et M_n. La somme se disperse de plus en plus — son écart-type croît comme $\sqrt{n}$; la moyenne se concentre — le sien décroît comme $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

MÉTHODES

Méthode 1 — Espérance et variance d'une transformation affine

1. Identifier a et b dans l'écriture $Y = aX + b$.
2. Appliquer $E(Y) = aE(X) + b$.
3. Appliquer $V(Y) = a^2V(X)$ — le b disparaît.
4. Pour l'écart-type, prendre $|a|\,\sigma(X)$, valeur absolue comprise.

Exemple éclair. Si $E(X) = 4$ et $\sigma(X) = 2$, alors $Y = -3X + 5$ vérifie $E(Y) = -7$ et $\sigma(Y) = 6$.

■ **Erreur à éviter.** Omettre la valeur absolue. Un écart-type est toujours positif : $\sigma(-3X) = 3\sigma(X)$, jamais $-3\sigma(X)$.

Méthode 2 — Décomposer en somme de variables simples

1. Repérer que la variable compte un total ou un cumul.
2. Écrire $X = X_1 + \cdots + X_n$ en précisant ce que vaut chaque X_i.
3. Calculer $E(X_i)$ et $V(X_i)$ pour une seule d'entre elles.
4. Appliquer la linéarité, et l'additivité des variances **après avoir justifié l'indépendance**.

➤ **Astuce.** Cette décomposition transforme un calcul global en un calcul élémentaire répété. C'est elle qui démontre $E(X) = np$ pour la loi binomiale, sans jamais manipuler de coefficient binomial.

Méthode 3 — Étudier un échantillon

1. Vérifier que les variables sont **indépendantes et de même loi**.
2. Relever μ et V pour une variable individuelle.
3. Appliquer les formules de S_n ou de M_n selon ce qui est demandé.
4. Interpréter : la somme se disperse, la moyenne se concentre.

■ **Erreur à éviter.** Utiliser les formules de S_n quand la question porte sur M_n. Lisez l'énoncé : « total » appelle S_n, « moyenne » ou « proportion » appelle M_n.

Méthode 4 — Dimensionner un échantillon

1. Écrire la contrainte sur l'écart-type : $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant s$.
2. Isoler $\sqrt{n}$, puis élever au carré : $n \geqslant \dfrac{\sigma^2}{s^2}$.
3. Prendre le plus petit entier convenable.
4. Vérifier en recalculant $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

➤ **Bon réflexe.** L'exposant 2 est le cœur de la question : diviser la dispersion par k multiplie la taille par k^2. C'est la même mécanique que la marge d'erreur du chapitre 14.

Méthode 5 — Calculer l'espérance d'un gain

1. Dresser la loi de probabilité du gain, valeurs et probabilités.
2. Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
3. Calculer $E(G) = \sum p_i g_i$, **sans oublier** de compter la mise en négatif.
4. Conclure : jeu favorable si $E(G) > 0$, équitable si $E(G) = 0$, défavorable sinon.

■ **Erreur à éviter.** Confondre le gain **brut** et le gain **algébrique**. Si la partie coûte 2 euros et rapporte 5, le gain algébrique est $+3$, pas $+5$.

Méthode 6 — Justifier une indépendance, ou son absence

Quand. L'énoncé demande d'additionner des variances, ce qui suppose l'indépendance — ou propose une situation où elle échoue.

1. Décrire précisément l'expérience associée à chaque variable.
2. Se demander si le résultat de l'une modifie la loi de l'autre.
3. Tirage avec remise, lancers répétés, individus distincts d'une grande population : indépendance.
4. Tirage sans remise, variables portant sur le même individu : **pas** d'indépendance — la variance ne s'additionne plus.

➤ **Bon réflexe.** L'espérance reste linéaire même sans indépendance. Si vous n'avez besoin que de $E(X+Y)$, la question ne se pose pas — et le dire vaut un point.

ERREURS FRÉQUENTES ET BONS RÉFLEXES

■ Erreur	✓ Bon réflexe
Écrire $V(aX+b) = aV(X) + b$	C'est $a^2V(X)$, et b disparaît
Additionner les variances sans indépendance	Le théorème 13.3 l'exige
Exiger l'indépendance pour l'espérance	La linéarité est inconditionnelle
Écrire $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma}{n}$	C'est $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Confondre V et σ	La variance est le carré de l'écart-type
Croire que doubler n divise l'incertitude par 2	Elle est divisée par $\sqrt{2} \approx 1,41$

MODULE PYTHON — CONVERGENCE DE LA MOYENNE D'UN ÉCHANTILLON

```
# Convergence de la moyenne d'un echantillon
from random import randint

def moyenne_echantillon(n):
    # n lancers d'un de equilibre
    somme = 0
    for i in range(n):
        somme = somme + randint(1, 6)
    return somme / n

mu = 3.5
sigma = (35 / 12) ** 0.5
print("Loi du de : mu =", mu, " sigma =", round(sigma, 6))
liste_n = [10, 100, 1000, 10000, 100000]
for i in range(len(liste_n)):
    n = liste_n[i]
    m = moyenne_echantillon(n)
    ecart_type = sigma / n ** 0.5
    print("n =", n, " moyenne :", round(m, 4))
    print(" ecart-type de M_n :", round(ecart_type, 6))
```

Trace d'exécution *(les moyennes varient d'une exécution à l'autre)*

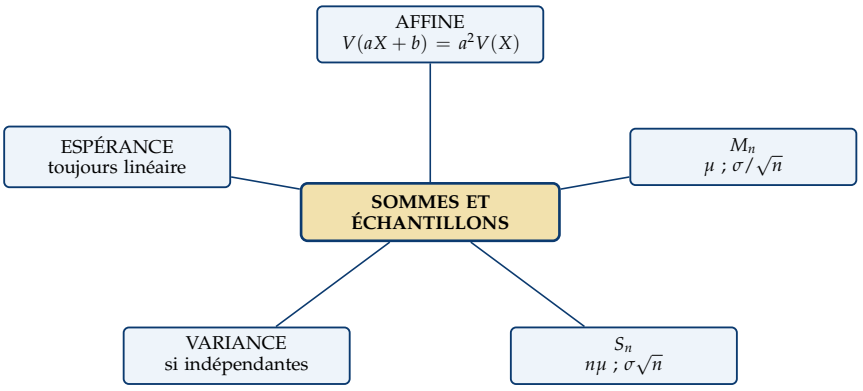
```
Loi du de : mu = 3.5 sigma = 1.707825
n = 10 moyenne : 3.6
ecart-type de M_n : 0.540062
n = 100 moyenne : 3.35
ecart-type de M_n : 0.170783
n = 1000 moyenne : 3.471
ecart-type de M_n : 0.054006
n = 10000 moyenne : 3.5221
ecart-type de M_n : 0.017078
n = 100000 moyenne : 3.5012
ecart-type de M_n : 0.005401
```

Interprétation mathématique. L'écart-type théorique de M_n vaut $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Il est divisé par $\sqrt{10} \approx 3,16$ chaque fois que n est multiplié par 10 : on lit $0,540 \to 0,171 \to 0,054 \to 0,017 \to 0,0054$, rapports conformes ✓

Les écarts observés entre la moyenne empirique et 3,5 restent, à chaque ligne, du même ordre de grandeur que $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ — parfois un peu au-dessus, le plus souvent en dessous. Relancez le programme : les moyennes changent, la colonne des écarts-types théoriques, elle, ne bouge pas.

■ **Ce n'est pas une démonstration.** La trace montre que M_n s'approche de μ, mais rien n'interdit une exécution où M_{100000} s'écarterait fortement — c'est simplement très improbable. **Quantifier ce « très improbable » est l'objet du chapitre 14.**

SYNTHÈSE



13.6 — Synthèse du chapitre 13

Les trois réflexes du chapitre

1. L'espérance s'additionne toujours ; la variance seulement si indépendance.
2. $V(aX+b) = a^2V(X)$: le carré, et b disparaît.
3. $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$: la précision progresse lentement.

EXERCICES

SÉRIE A ★

EXERCICE 415 ★

X prend les valeurs $1, 2, 5$ avec probabilités $0,5, 0,3, 0,2$. Calculer $E(X)$.

EXERCICE 416 ★

Avec la variable de l'exercice précédent, calculer $E(X^2)$ puis $V(X)$ et $\sigma(X)$.

EXERCICE 417 ★

$E(X) = 4$ et $V(X) = 9$. Calculer $E(3X+2)$ et $V(3X+2)$.

EXERCICE 418 ★

$E(X) = 3$ et $E(Y) = -1$. Calculer $E(X+Y)$ puis $E(2X-3Y)$.