Chapitre 14. Cours

Concentration et loi des grands nombres

Objectifs du chapitre — programme officiel (BO 2019)

Ce document contient. Cours complet : définitions, propriétés et démonstrations exigibles, fiches méthodes guidées, exemples résolus et synthèse du chapitre.

Extrait du manuel *Math Convergence — Terminale, spécialité mathématiques*
A. Choukoukou · session 2027 · reproduit avec l'autorisation de l'auteur.

CHAPITRE

14

CONCENTRATION ET LOI DES GRANDS NOMBRES

*Depuis le chapitre 12, chaque simulation s'est achevée sur le même aveu : « une simulation ne démontre rien ». Ce chapitre lève cet aveu. Une seule inégalité, valable pour **toutes** les lois sans exception, transforme une observation empirique en théorème.*

Objectifs. Appliquer l'inégalité de Markov · appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev · établir et utiliser l'inégalité de concentration · énoncer et exploiter la loi des grands nombres · déterminer une taille d'échantillon garantissant une précision donnée.

Compétences travaillées. Raisonner (dominante) · Calculer · Modéliser

Prérequis. Chapitre 13 : espérance, variance, échantillon, $E(M_n) = \mu$ et $V(M_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ · chapitre 12 : loi binomiale · chapitre 1 : limite d'une suite.

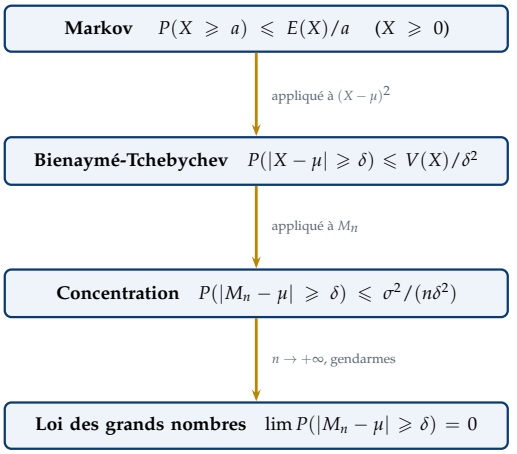
Diagnostic express.

1. $X \sim \mathcal{B}(100\,;\,0{,}5)$. Que valent $E(X)$ et $V(X)$?
2. Que vaut $\sigma(M_n)$ pour un échantillon d'écart-type σ ?
3. Résoudre $\dfrac{25}{n} \leqslant 0{,}05$.
4. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n}$?
5. Traduire $|x-5| \geqslant 2$ par un encadrement.

Corrigé en fin de chapitre.

COURS

1. Inégalité de Markov



14.1 — De Markov à la loi des grands nombres

Théorème 14.1 (Markov). *(complément utile à la démonstration, non exigible)* Soit X une variable aléatoire **à valeurs positives ou nulles**. Pour tout réel $a > 0$:

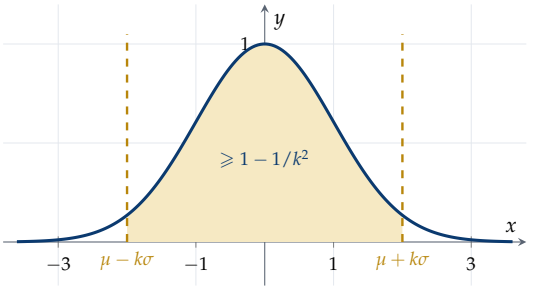
$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

Exemple d'application. Un site reçoit en moyenne 200 visites par heure. La probabilité d'en recevoir au moins 1 000 dans une heure donnée est majorée par $\dfrac{200}{1\,000} = 0{,}2$.

■ **Erreur à éviter.** L'hypothèse $X \geqslant 0$ est **indispensable**. Sans elle, l'inégalité est fausse : une variable pouvant prendre de grandes valeurs négatives aurait une espérance faible tout en dépassant souvent a.

➤ **Ce que dit Markov.** Une seule information — l'espérance — suffit à majorer la probabilité des grandes valeurs. C'est une majoration **grossière**, mais elle ne demande rien d'autre.

2. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev



14.2 — La zone contrôlée par l'inégalité

Théorème 14.2 (Bienaymé-Tchebychev). Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V. Pour tout réel $\delta > 0$:

$$P\big(|X - \mu| \geqslant \delta\big) \leqslant \frac{V}{\delta^2}$$

Lecture. L'écart à la moyenne est d'autant plus improbable que la variance est faible et l'écart exigé grand. Le carré au dénominateur fait chuter la majoration très vite.

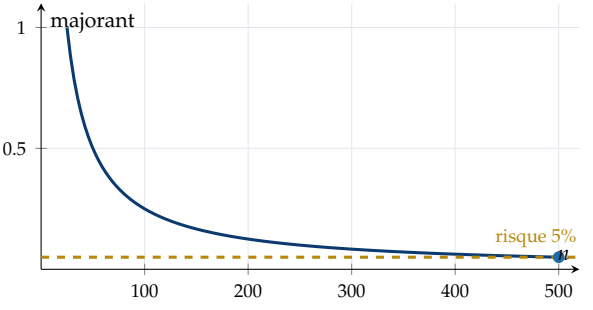
➤ **Bon réflexe.** Contrairement à Markov, cette inégalité ne demande **aucune** hypothèse de signe. En revanche elle exige la variance, donc une information de plus.

Forme en écarts-types. En posant $\delta = k\sigma$:

$$P\big(|X - \mu| \geqslant k\sigma\big) \leqslant \frac{1}{k^2}$$

Au-delà de deux écarts-types, la probabilité est majorée par $0{,}25$; au-delà de trois, par $\frac{1}{9}$.

3. Inégalité de concentration



14.3 — Le majorant décroît en $\frac{1}{n}$

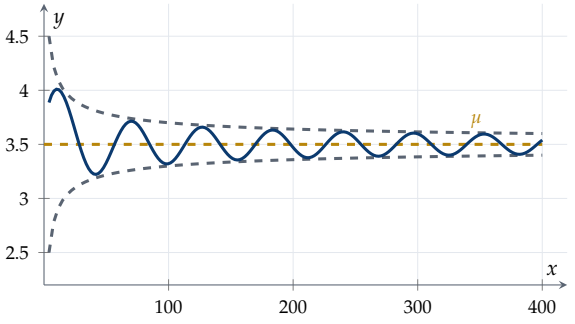
Théorème 14.3 (concentration). Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires **indépendantes** de même loi, d'espérance μ et de variance V. On note $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ la moyenne empirique. Pour tout $\delta > 0$:

$$P\big(|M_n - \mu| \geqslant \delta\big) \leqslant \frac{V}{n\,\delta^2}$$

Démonstration. On applique Bienaymé-Tchebychev à M_n, dont l'espérance vaut μ et la variance $\dfrac{V}{n}$.

➤ **Le facteur décisif est n.** Multiplier la taille de l'échantillon par 100 divise la majoration par 100. C'est ce qui rend les sondages possibles.

4. Loi des grands nombres



14.4 — La moyenne d'un échantillon se resserre autour de μ

Théorème 14.4 (loi des grands nombres). Avec les mêmes hypothèses, pour tout $\delta > 0$:

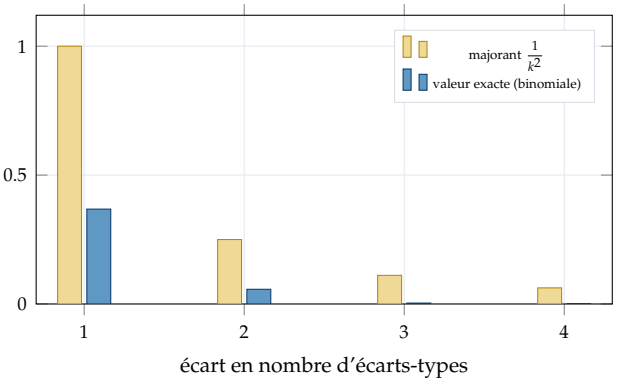
$$\lim_{n \to +\infty} P\big(|M_n - \mu| \geqslant \delta\big) = 0$$

Interprétation. La moyenne d'un grand échantillon s'approche de l'espérance théorique avec une probabilité qui tend vers 1. C'est le fondement de l'estimation statistique.

■ **Erreur à éviter.** La loi des grands nombres ne dit **pas** que M_n finit par valoir μ, ni qu'un écart devient impossible. Elle dit que sa **probabilité** tend vers zéro. Un échantillon atypique reste concevable, il devient seulement rare.

➤ **Rédaction attendue.** Trois éléments : les variables sont indépendantes et de même loi, on applique l'inégalité de concentration, la majoration tend vers 0 car n est au dénominateur. Chacun vaut un point.

5. Finesse des majorations



14.5 — Le majorant reste toujours au-dessus de la valeur exacte

Ces inégalités sont **universelles** : elles valent pour toute loi vérifiant les hypothèses. Ce caractère général se paie par leur imprécision.

Exemple d'application. Pour X suivant $\mathcal{B}(100\,;0{,}5)$, on a $\mu = 50$ et $V = 25$. Bienaymé-Tchebychev majore $P(|X-50| \geqslant 20)$ par $\dfrac{25}{400} = 0{,}0625$, alors que la valeur exacte est de l'ordre de 0,0001.

➤ **Ce qu'il faut en retenir.** Une majoration n'est pas une valeur. Ces inégalités servent à **garantir** qu'une probabilité est petite, jamais à l'estimer. Quand l'énoncé demande « majorer », c'est le mot qui compte.

MÉTHODES

Méthode 1 — Appliquer l'inégalité de Markov

1. Vérifier que X est à valeurs **positives ou nulles**.
2. Calculer ou relever $E(X)$.
3. Identifier le seuil a dans l'énoncé.
4. Écrire $P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}$ et conclure **dans le contexte**.

➤ **Bon réflexe.** La vérification du signe vaut un demi-point et prend une ligne. Un temps d'attente, un nombre d'objets, une durée sont positifs par nature : dites-le.

Méthode 2 — Appliquer Bienaymé-Tchebychev

1. Calculer $\mu = E(X)$ et $V = V(X)$.
2. Traduire l'énoncé en un écart $|X - \mu| \geqslant \delta$, en identifiant δ.
3. Appliquer $P(|X - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V}{\delta^2}$.
4. Pour un événement de la forme « X hors de $]\mu - \delta\,;\,\mu + \delta[$ », c'est directement cette majoration.

■ **Erreur à éviter.** Confondre variance et écart-type au dénominateur. C'est bien $\dfrac{V}{\delta^2}$, donc $\dfrac{\sigma^2}{\delta^2}$ — jamais $\dfrac{\sigma}{\delta^2}$.

Méthode 3 — Utiliser l'inégalité de concentration

1. Vérifier que les variables sont **indépendantes et de même loi**.
2. Identifier μ, V et la taille n de l'échantillon.
3. Traduire l'énoncé en un écart $|M_n - \mu| \geqslant \delta$.
4. Appliquer $P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V}{n\delta^2}$.

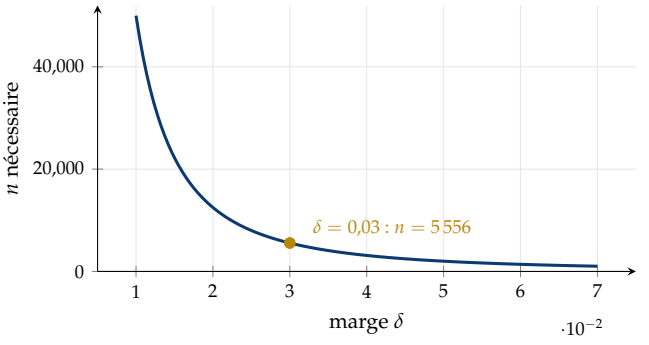
➤ **Astuce.** L'événement complémentaire « M_n dans l'intervalle » se minore alors par $1 - \dfrac{V}{n\delta^2}$. C'est souvent cette forme que l'énoncé attend.

Méthode 4 — Déterminer une taille d'échantillon

1. Écrire la condition demandée : $\dfrac{V}{n\delta^2} \leqslant \varepsilon$.
2. Isoler n : $n \geqslant \dfrac{V}{\varepsilon\,\delta^2}$.
3. Prendre le plus petit **entier** convenable.
4. Interpréter : « il faut interroger au moins n personnes ».

➤ **Bon réflexe.** δ apparaît au carré : diviser la marge d'erreur par deux multiplie la taille requise par **quatre**. C'est la raison économique pour laquelle les sondages s'arrêtent à mille personnes.

Méthode 5 — Rédiger une conclusion de loi des grands nombres



14.6 — Taille d'échantillon selon la marge visée

1. Rappeler que les variables sont indépendantes, de même loi, d'espérance μ et de variance V.
2. Écrire l'inégalité de concentration pour un δ fixé.
3. Observer que $\dfrac{V}{n\delta^2} \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$.
4. Conclure : la probabilité que la moyenne s'écarte de μ de plus de δ tend vers 0.

■ **Erreur à éviter.** Écrire « M_n tend vers μ ». C'est la **probabilité de l'écart** qui tend vers 0, pas la variable aléatoire elle-même. La formulation exacte est un point de barème.

Méthode 6 — Comparer une majoration à la valeur exacte

Quand. L'énoncé demande de calculer une probabilité binomiale **et** de la majorer, puis de commenter.

1. Calculer la valeur exacte à la calculatrice.
2. Appliquer l'inégalité demandée.
3. Comparer les deux nombres, en donnant l'ordre de grandeur du rapport.
4. Conclure : l'inégalité est **universelle**, donc large ; elle garantit sans estimer.

➤ **Ce que le correcteur attend.** Non pas « la majoration est mauvaise », mais « la majoration est valable pour **toute** loi vérifiant les hypothèses, ce qui explique qu'elle soit bien au-dessus de la valeur exacte pour une loi particulière ».

ERREURS FRÉQUENTES ET BONS RÉFLEXES

■ Erreur	✓ Bon réflexe
Appliquer Markov à une variable pouvant être négative	L'hypothèse $X \geqslant 0$ est indispensable
Écrire $\dfrac{V(X)}{\delta}$ au lieu de $\dfrac{V(X)}{\delta^2}$	Le dénominateur est au **carré**
Utiliser σ au lieu de σ^2 au numérateur	C'est la **variance**
Annoncer un majorant supérieur à 1 comme une information	Toute probabilité est déjà $\leqslant 1$
Croire que Bienaymé-Tchebychev donne la valeur exacte	C'est une **majoration**, souvent large
Dire que M_n tend vers μ	C'est la **probabilité de l'écart** qui tend vers 0
Oublier $\dfrac{1}{n}$ dans l'inégalité de concentration	C'est ce facteur qui fait toute la loi des grands nombres

MODULE PYTHON — MAJORATION CONTRE VALEUR EXACTE

```
# Majoration de Bienayme-Tchebychev contre valeur exacte

def combinaison(n, p):
    resultat = 1
    for i in range(p):
        resultat = resultat * (n - i) // (i + 1)
    return resultat

def proba_binomiale(n, p, k):
    return combinaison(n, k) * p ** k * (1 - p) ** (n - k)

def proba_exacte_ecart(n, p, delta):
```

```
    # P(|X - np| >= delta)
    mu = n * p
    total = 0
    for k in range(n + 1):
        if abs(k - mu) >= delta:
            total = total + proba_binomiale(n, p, k)
    return total

def majorant(n, p, delta):
    return n * p * (1 - p) / (delta * delta)

liste_n = [100, 100, 400, 200]
liste_p = [0.5, 0.5, 0.5, 0.4]
liste_delta = [10, 15, 30, 20]
print("B(n ; p) : majorant de Bienayme-Tchebychev et valeur exacte")
for i in range(len(liste_n)):
    n = liste_n[i]
    p = liste_p[i]
    delta = liste_delta[i]
    m = majorant(n, p, delta)
    e = proba_exacte_ecart(n, p, delta)
    print("n =", n, " p =", p, " delta =", delta)
    print(" majorant :", round(m, 5), " exact :", round(e, 6))
    print(" rapport :", round(m / e, 1))
```

Trace d'exécution

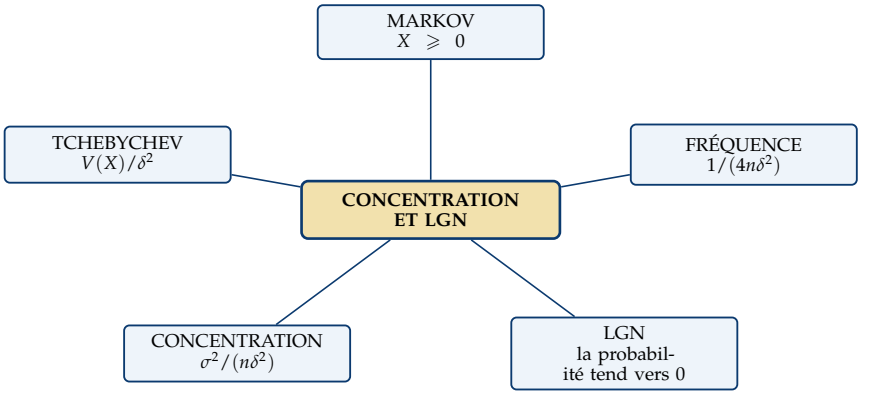
```
B(n ; p) : majorant de Bienayme-Tchebychev et valeur exacte
n = 100 p = 0.5 delta = 10
majorant : 0.25 exact : 0.056888
rapport : 4.4
n = 100 p = 0.5 delta = 15
majorant : 0.11111 exact : 0.003518
rapport : 31.6
n = 400 p = 0.5 delta = 30
majorant : 0.11111 exact : 0.003129
rapport : 35.5
n = 200 p = 0.4 delta = 20
majorant : 0.12 exact : 0.004766
rapport : 25.2
```

Interprétation mathématique. Le majorant est **toujours supérieur** à la valeur exacte : l'inégalité est vérifiée dans les quatre cas ✓

Mais le rapport se dégrade fortement quand δ s'éloigne de l'écart-type : il vaut $4,4$ pour un écart de deux écarts-types ($n = 100$, $\delta = 10$, $\sigma = 5$) et monte à $35,5$ pour un écart de trois écarts-types ($n = 400$, $\delta = 30$, $\sigma = 10$). C'est le prix de l'universalité — l'inégalité doit rester vraie pour la pire loi possible, et la binomiale est très loin d'être ce pire cas.

Ce que cela signifie en pratique. Une taille d'échantillon calculée par Bienaymé-Tchebychev est **surdimensionnée**, souvent d'un facteur 10 ou plus. Elle a l'avantage décisif de ne demander aucune hypothèse : on l'utilise quand on ne connaît rien de la loi, ou quand on veut une garantie absolue.

SYNTHÈSE



14.7 — Synthèse du chapitre 14

Les trois réflexes du chapitre

1. L'espérance s'additionne **toujours** — aucune hypothèse n'est requise.
2. La variance ne s'additionne que sous **indépendance** : c'est elle qui fournit $V(M_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.
3. Bienaymé-Tchebychev transforme cette variance en **garantie de concentration** : $P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\delta^2}$, d'où découle la loi des grands nombres.

EXERCICES

SÉRIE A ★

EXERCICE 435 ★

X est une variable positive d'espérance 2. Majorer $P(X \geqslant 10)$ puis $P(X \geqslant 5)$.

EXERCICE 436 ★

$E(X) = 20$ et $V(X) = 9$. Majorer $P(|X - 20| \geqslant 6)$.

EXERCICE 437 ★

$X \sim \mathcal{B}(100\,;\,0{,}5)$. Majorer $P(|X - 50| \geqslant 10)$ par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

EXERCICE 438 ★

Énoncer la loi faible des grands nombres, en précisant les hypothèses.