Chapitre 1. Cours

Nombres et calcul algébrique

1. Les ensembles de nombres

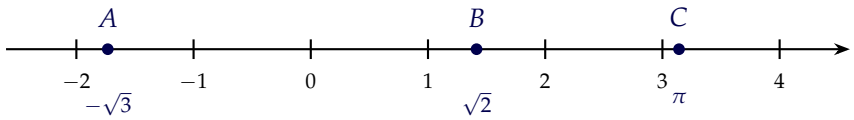
Définition 1.1 — Les cinq ensembles usuels

- $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;\dots\}$: les **entiers naturels**.
- $\mathbb{Z} = \{\dots;-3;-2;-1;0;1;2;3;\dots\}$: les **entiers relatifs**.
- $\mathbb{D}$: les **nombres décimaux**, ceux qui s'écrivent $n \times 10^p$ avec n et p dans $\mathbb{Z}$.
  Exemples : $4\,789 \times 10^{-3} = 4{,}789$; $216 \times 10^{-4} = 0{,}0216$.
- $\mathbb{Q}$: les **nombres rationnels**, ceux qui s'écrivent $\frac{p}{q}$ avec p entier relatif et q entier relatif non nul.
  Exemples : $\frac{2}{3}$; $\frac{6}{1}$; $-\frac{8}{7}$.
- $\mathbb{R}$: les **nombres réels**, c'est-à-dire les nombres qui sont soit rationnels, soit irrationnels.

Un nombre **irrationnel** est un nombre qu'on ne peut *pas* écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers relatifs, $q \neq 0$. Exemples : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π.

Remarque — Tous les nombres de Seconde sont des réels

On représente $\mathbb{R}$ par une droite graduée, appelée **droite numérique** : à chaque point correspond un réel, son **abscisse**, et réciproquement.



Le point A a pour abscisse $-\sqrt{3}$; les réels positifs $\sqrt{2}$ et π sont les abscisses de B et C.

Propriété 1.2 — Des ensembles emboîtés

Chaque ensemble est contenu dans le suivant :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

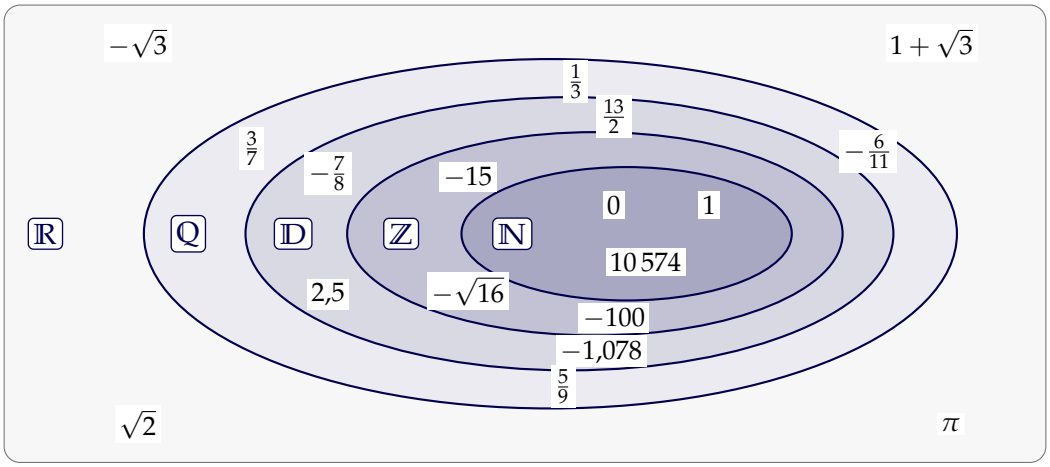
Ces inclusions sont *strictes* : à chaque étape, de nouveaux nombres apparaissent.

Exemple 1.3 — Situer un nombre

- $\frac{28}{7} = 4$: une écriture fractionnaire peut cacher un entier, donc $\frac{28}{7} \in \mathbb{N}$.
- $-\sqrt{16} = -4 \in \mathbb{Z}$: un radical peut cacher un entier.
- $\frac{3}{5} = 0{,}6 \in \mathbb{D}$.
- $\frac{1}{3} = 0{,}333\dots$: l'écriture décimale ne s'arrête pas, donc $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

• π et $\sqrt{2}$ ne sont quotients d'aucun couple d'entiers : ce sont des irrationnels, dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{Q}$.

On visualise ces inclusions par des **ensembles emboîtés** : chaque ensemble est un « anneau » qui contient tout le précédent et lui ajoute de nouveaux nombres.



Les quatre nombres des coins — $-\sqrt{3}$, $1+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ et π — sont dans $\mathbb{R}$ mais hors de $\mathbb{Q}$: ce sont les **irrationnels**.

Définition 1.4 — Vocabulaire des ensembles

- $x \in A$: l'**élément** x **appartient** à l'ensemble A ; sinon on écrit $x \notin A$.
- $A \subset B$: A est **inclus** dans B — tout élément de A appartient à B.
- $\varnothing$: l'**ensemble vide**, qui n'a aucun élément.
- Si A a un nombre fini d'éléments, $\text{Card}(A)$ est ce nombre. Exemple : $\text{Card}(\{2;4;6;8\}) = 4$.
- Le **produit cartésien** $A \times B$ est l'ensemble des couples $(a;b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Exemple : $\{1;2\} \times \{a;b;c\}$ compte $2 \times 3 = 6$ couples.

Attention — $\in$ ou $\subset$?

$\in$ relie un *élément* à un ensemble, $\subset$ relie un *ensemble* à un ensemble. On écrit $2 \in \mathbb{N}$ et $\{2\} \subset \mathbb{N}$, mais jamais $2 \subset \mathbb{N}$.

Remarque — Énoncé, réciproque, contraposée

Soit l'énoncé « si P alors Q ». Sa **réciproque** est « si Q alors P » : elle peut être fausse même quand l'énoncé est vrai. Sa **contraposée** est « si non Q alors non P » : elle est *toujours* vraie en même temps que l'énoncé, et il est parfois plus simple de la démontrer. Exemple : « si n est pair, alors n^2 est pair » a pour contraposée « si n^2 est impair, alors n est impair ».

Démonstration — $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel

Raisonnons **par l'absurde** : supposons $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, fraction *irréductible* (p et q entiers non nuls sans diviseur commun autre que 1). En élevant au carré : $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$, donc $p^2 = 2q^2$. Ainsi p^2 est pair, donc p est pair (contraposée de « p impair $\Rightarrow$ p^2 impair », car $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$ est impair). Écrivons $p = 2k$: alors $4k^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2k^2$, donc q^2 est pair et q est pair aussi.

Mais alors p et q sont tous deux divisibles par 2 : contradiction avec l'irréductibilité. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. ■

2. Fractions

Propriété 2.1 — Le signe moins dans une fraction

Pour tous réels a et b avec $b \neq 0$:

$$(-1) \times \frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}.$$

Le signe moins peut donc être placé devant la fraction, au numérateur ou au dénominateur : c'est le même nombre. Ainsi $-\dfrac{7}{2}$ et $\dfrac{7}{-2}$ sont égales.

Propriété 2.2 — Simplifier une fraction

Quand le numérateur et le dénominateur ont un facteur commun, on simplifie par ce facteur :

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \qquad (b \neq 0,\ c \neq 0).$$

Une fraction qu'on ne peut plus simplifier est dite **irréductible**.

Exemple 2.3

$$\frac{231}{105} = \frac{21 \times 11}{21 \times 5} = \frac{11}{5}.$$

On ne peut pas simplifier davantage : $\dfrac{11}{5}$ est irréductible.

Propriété 2.4 — Égalité de deux fractions

Pour $b \neq 0$ et $d \neq 0$:

$$\frac{a}{b} = 0 \iff a = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc.$$

La seconde équivalence s'appelle le **produit en croix**.

Propriété 2.5 — Les quatre opérations

Pour tous réels, avec des dénominateurs non nuls :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

On additionne *après* réduction au même dénominateur ; on divise en multipliant par l'inverse ; on simplifie toujours le résultat.

Exemple 2.6

$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{19}{12}$ $\quad \frac{2}{3}\div\frac{5}{9}=\frac{2}{3}\times\frac{9}{5}=\frac{18}{15}=\frac{6}{5}$ $\quad \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}=\frac{15}{8}$.

3. Puissances

Définition 3.1 — Puissances d'un réel

Soit a un réel et n un entier naturel non nul :

$$a^n=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n \text{ facteurs}} \qquad \text{et, si } a\neq 0, \qquad a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

Pour $a\neq 0$ on pose $a^0=1$, et $a^{-1}=\frac{1}{a}$ est l'**inverse** de a.
Cas des puissances de 10 : $10^5=100\,000$ (cinq zéros) et $10^{-4}=\frac{1}{10^4}=0{,}0001$ (quatre décimales).

Propriété 3.2 — Règles de calcul

Pour a et b réels non nuls, m et n entiers relatifs :

$$a^m\times a^n=a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n} \qquad (a^m)^n=a^{mn} \qquad (ab)^n=a^nb^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Attention — La puissance d'une somme

En général $(a+b)^n\neq a^n+b^n$: par exemple $(3+4)^2=49$ alors que $3^2+4^2=25$. Les règles ci-dessus ne portent que sur des *produits* et des *quotients*.

Exemple 3.3

$\frac{(7{,}1)^{-3}}{(7{,}1)^5}=(7{,}1)^{-3-5}=(7{,}1)^{-8}$ $\quad \left(4\times10^{-3}\right)^3=4^3\times\left(10^{-3}\right)^3=64\times10^{-9}=6{,}4\times10^{-8}$.

Définition 3.4 — Notation scientifique

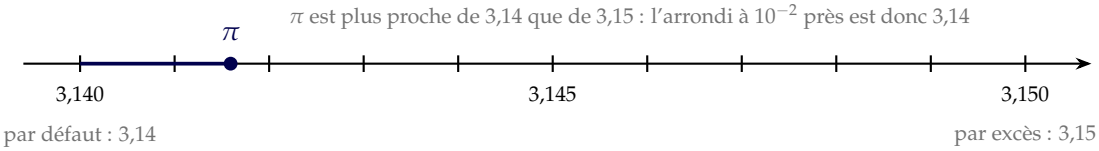
La notation scientifique d'un nombre décimal non nul est son écriture $a\times10^p$ où a est un décimal tel que $1\leqslant a<10$ et p un entier relatif.
Exemples : $593{,}7=5{,}937\times10^2$; $0{,}051=5{,}1\times10^{-2}$; $7\,300=7{,}3\times10^3$.
Elle sert dans toutes les sciences à écrire simplement des quantités très grandes ou très petites.

Définition 3.5 — Valeur exacte, valeurs approchées

$\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$, π sont des **valeurs exactes**. À partir de $\pi=3{,}14159265\ldots$:

- **troncature** à 6 décimales : 3,141592 — on coupe, sans regarder la suite ;
- valeur approchée à 10^{-2} près **par défaut** : 3,14 ; **par excès** : 3,15 ;
- valeur **arrondie** à 10^{-4} près : 3,1416 — on prend la plus proche ;
- valeur arrondie à 4 **chiffres significatifs** : 3,142.

Sur une droite graduée où l'unité représente 10^{-3}, entre les deux valeurs approchées à 10^{-2} près :



Remarque — La machine calcule en valeurs approchées

En Python, `0.1 + 0.2` affiche `0.30000000000000004` : ce n'est pas un bug, mais le fait que 0,1 et 0,2 n'ont pas d'écriture exacte en binaire. Savoir dans quel monde on calcule — exact ou approché — est un réflexe de Seconde.

4. Racine carrée

Définition 4.1 — Racine carrée

La racine carrée d'un réel $a \geqslant 0$, notée $\sqrt{a}$, est **le nombre positif dont le carré vaut** a. Ainsi $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{9} = 3$, et $\sqrt{2}$ est le nombre positif dont le carré vaut 2.

Attention — Deux erreurs classiques

- Bien que $(-2)^2 = 4$, on a $\sqrt{4} = 2$ et *non* -2 : par définition la racine est positive.
- $\sqrt{a}$ n'existe pas pour $a < 0$: un carré n'est jamais négatif.

Propriété 4.2 — Règles de calcul

Pour $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, et n entier naturel :

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \qquad \sqrt{a^2} = a \qquad \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \ (b > 0) \qquad \sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n.$$

Attention — La racine d'une somme

En général $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$: par exemple $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. La racine ne se distribue que sur les produits et les quotients.

Méthode 4.3 — Simplifier une écriture avec des racines

1. *Sortir le plus grand carré parfait.* $50 = 25 \times 2$, donc $\sqrt{50} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.
2. *Simplifier avant d'additionner.* $\sqrt{18} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.
3. *Utiliser le quotient.* $\sqrt{\dfrac{48}{16}} = \dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{16}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

5. Nombres premiers

Définition 5.1 — Nombre premier

Un entier naturel est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
Par convention, 1 n'est pas premier (il n'a qu'un seul diviseur).
Exemples : 3, 5, 13, 71 sont premiers ; 14 ne l'est pas, car ses diviseurs sont 1, 2, 7 et 14.

Méthode 5.2 — Le crible d'Ératosthène

On écrit les entiers, on barre 0 et 1, puis on barre tous les multiples de 2 (sauf 2), de 3 (sauf 3), de 5, de 7… Les nombres qui restent sont les nombres premiers.

~~0~~	~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~
~~10~~	**11**	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**
~~20~~	~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**
~~30~~	**31**	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~
~~40~~	**41**	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~

Les 15 nombres premiers inférieurs à 50 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Propriété 5.3 — Critères de divisibilité

Un entier est divisible :
- par 2 si son chiffre des unités est pair ;
- par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;
- par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Exemple : pour 1 053, la somme des chiffres vaut $1 + 0 + 5 + 3 = 9$: ce nombre est donc divisible par 3 *et* par 9, mais pas par 2 ni par 5.

Méthode 5.4 — Reconnaître un nombre premier

On divise le nombre successivement par 2, 3, 5, 7, 11, … (les nombres premiers), et l'on s'arrête dès que le quotient obtenu devient *inférieur* au diviseur : il est alors inutile de poursuivre.

157 *est-il premier ?*

Diviseur d	157 divisible par d ?	Quotient $157 \div d$	Comparaison
2	non	78,5	$78{,}5 > 2$, on continue
3	non	52,3…	$52{,}3 > 3$, on continue
5	non	31,4	$31{,}4 > 5$, on continue
7	non	22,4…	$22{,}4 > 7$, on continue
11	non	14,3…	$14{,}3 > 11$, on continue
13	non	12,08…	$12{,}08 < 13$: **on s'arrête**

Aucun diviseur n'a été trouvé avant l'arrêt : **157 est premier**.

Méthode 5.5 — Décomposer en produit de facteurs premiers

On divise par 2 tant que c'est possible, puis par 3, puis par 5, par 7… jusqu'à obtenir 1.

1050	2
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

On lit la colonne de droite :

$$1\,050 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7.$$

Contrôle : $2 \times 3 = 6$, $6 \times 25 = 150$, $150 \times 7 = 1\,050$ ✓.
Cette décomposition est *unique* : c'est la « carte d'identité » du nombre.

6. Calcul littéral

Définition 6.1 — Développer, factoriser

Développer : transformer un produit en somme. **Factoriser** : transformer une somme en produit.

$$k(a+b) = ka + kb \qquad (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

Théorème 6.2 — Les trois identités remarquables

Pour tous réels a et b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Démonstration — Première identité

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ par double distributivité. Les deux autres se démontrent de la même façon. ■

Exemple 6.3

Développer : $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$; $(2x-5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$; $(3x+2)(3x-2) = 9x^2 - 4$.
Factoriser : $x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$; $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$; $9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2$.
Calcul astucieux : $1002^2 - 998^2 = (1002 - 998)(1002 + 998) = 4 \times 2\,000 = 8\,000$.

Propriété 6.4 — Équations de référence

- **Premier degré** : $ax + b = 0$ (avec $a \neq 0$) a pour unique solution $x = -\dfrac{b}{a}$.
- **Équation produit** : $AB = 0 \iff A = 0$ ou $B = 0$.
- **Équation** $x^2 = a$: si $a > 0$, deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$; si $a = 0$, la seule solution 0 ; si $a < 0$, aucune solution réelle.

Exemple 6.5

• $5x - 7 = 3x + 9 \iff 2x = 16 \iff x = 8$. • $(2x+3)(x-4) = 0 \iff x = -\dfrac{3}{2}$ ou $x = 4$.
• $x^2 = 49 \iff x = 7$ ou $x = -7$. • $x^2 = -9$: aucune solution. • $(x-1)^2 = 5 \iff x = 1 + \sqrt{5}$ ou $x = 1 - \sqrt{5}$.

Méthode 6.6 — Résoudre une inéquation du premier degré

Résoudre $-3x+5>11$: on isole x en suivant les règles d'ordre. On obtient $-3x>6$ puis, en divisant par $-3<0$, **on renverse le sens** : $x<-2$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=]-\infty\,;-2[$.

Attention — Les pièges qui coûtent des points

$(a+b)^2\neq a^2+b^2$ (il manque $2ab$) ; $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$; diviser par un nombre négatif renverse une inégalité ; on ne divise jamais par une expression qui peut être nulle : on factorise.

7. Module Python

```
def est_premier(n):
  # aucun diviseur d tel que d*d <= n ne doit diviser n
  if n < 2:
    return False
  d = 2
  while d * d <= n:
    if n % d == 0:
      return False
    d = d + 1
  return True
def decomposer(n):
  # liste des facteurs premiers de n, avec repetition
  facteurs = [] ; d = 2
  while d * d <= n:
    while n % d == 0:
      facteurs.append(d) ; n = n // d
    d = d + 1
  if n > 1:
    facteurs.append(n)
  return facteurs
```

Exemple 7.1 — Trace d'exécution

`est_premier(157)` renvoie `True` ; `est_premier(91)` renvoie `False` (car $91=7\times13$) ; `est_premier(1)` renvoie `False`.
`decomposer(1050)` renvoie `[2, 3, 5, 5, 7]`.

Attention — Pourquoi la boucle s'arrête à $d\times d\leqslant n$

C'est exactement la règle de la méthode 5.4 : si $n=d\times q$ avec $d>\sqrt{n}$, alors $q<\sqrt{n}$, et ce diviseur q aurait déjà été trouvé. Tester au-delà de $\sqrt{n}$ ne peut rien apporter de nouveau.

Remarque — Les trois réflexes du chapitre

1. Situer un nombre dans le bon ensemble avant de raisonner. 2. Simplifier (fractions, racines, facteurs premiers) avant de calculer. 3. Factoriser pour résoudre, développer pour réduire.

NOMBRES et calcul algébrique

Ensembles de nombres

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- Décimal : $\frac{a}{10^n}$ — l'écriture s'arrête
- Rationnel : $\frac{p}{q}$; $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$
- Irrationnels : $\sqrt{2}$, π (démo du cours)

Vocabulaire & logique

- $x \in A$ (élément) ; $A \subset B$ (ensemble)
- $\varnothing$; $\text{Card}(A)$ = nombre d'éléments
- $A \times B$: couples, $\text{Card} = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$
- Contraposée : si non Q alors non P

Puissances & racines

- $a^m a^n = a^{m+n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- Notation scientifique : $a \times 10^n$, $1 \leqslant a < 10$
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$; $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$!

Fractions & exact

- Même dénominateur avant d'additionner
- Diviser = multiplier par l'inverse
- Toujours simplifier le résultat
- Exact ($\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$) $\neq$ approché (0,33)

Identités remarquables

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- Développer pour réduire, factoriser pour résoudre

Équations & comparaison

- $AB = 0 \iff A = 0$ ou $B = 0$
- $x^2 = a$: deux, une ou zéro solution selon a
- Inéquation : $\times$ par un négatif renverse l'ordre
- Comparer par le rapport : de 40 à 46, $\times 1{,}15$

Chapitre 1 · Chaque branche renvoie à une section du cours et à une fiche méthode.