Chapitre 2. Cours

Intervalles et valeur absolue

1. La droite réelle et les intervalles

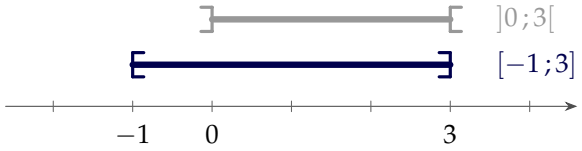
Tous les nombres réels se placent sur une droite graduée. Un *intervalle* est un morceau de cette droite « sans trou » : ce chapitre donne le vocabulaire pour le décrire, et la valeur absolue pour mesurer les distances dessus.

Définition 1.1 — Intervalles

Soient a et b deux réels avec $a \leqslant b$. Les **intervalles** de $\mathbb{R}$ sont les ensembles suivants :

Inégalité	Intervalle	Bornes
$a \leqslant x \leqslant b$	$x \in [a\,;b]$	fermé : a et b sont dedans
$a < x < b$	$x \in]a\,;b[$	ouvert : a et b sont dehors
$a \leqslant x < b$	$x \in [a\,;b[$	fermé en a, ouvert en b
$a < x \leqslant b$	$x \in]a\,;b]$	ouvert en a, fermé en b
$x \geqslant a$	$x \in [a\,;+\infty[$	non borné à droite
$x > a$	$x \in]a\,;+\infty[$	non borné, a exclu
$x \leqslant b$	$x \in]-\infty\,;b]$	non borné à gauche
$x < b$	$x \in]-\infty\,;b[$	non borné, b exclu

Un crochet **tourné vers** le nombre l'inclut ; tourné vers l'extérieur, il l'exclut.



Sur la droite graduée : crochets tournés vers l'intérieur pour $[-1\,;3]$ (bornes incluses), vers l'extérieur pour $]0\,;3[$ (bornes exclues).

Exemple 1.2 — Appartenance

- $2 \in [-1\,;3]$ et $3 \in [-1\,;3]$ (borne fermée), mais $3 \notin [-1\,;3[$ (borne ouverte).
- $\pi \in]3\,;4[$ car $3 < \pi < 4$.
- $-2 \notin [0\,;+\infty[$ car $-2 < 0$.
- $\sqrt{2} \in [1\,;2[$ car $1 \leqslant \sqrt{2} < 2$ (en effet $1 \leqslant 2 < 4$ et la racine conserve l'ordre).

Attention — Du côté de l'infini

$+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres : on ne les atteint jamais, le crochet est donc **toujours ouvert** de leur côté. On écrit $[2\,;+\infty[$, jamais $[2\,;+\infty]$. Enfin $\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$: la droite tout entière est un intervalle.

2. Réunion et intersection

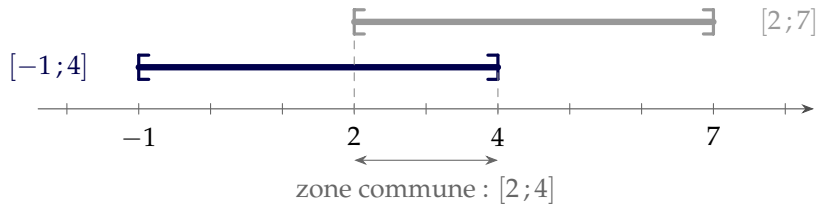
Définition 2.1 — Intersection, réunion

Soient A et B deux ensembles de réels.

- L'**intersection** $A \cap B$ (« A inter B ») est l'ensemble des réels qui appartiennent à A **et** à B.
- La **réunion** $A \cup B$ (« A union B ») est l'ensemble des réels qui appartiennent à A **ou** à B, c'est-à-dire à l'un au moins des deux.

Exemple 2.2

- $[-1\,;4] \cap [2\,;7] = [2\,;4]$ et $[-1\,;4] \cup [2\,;7] = [-1\,;7]$.



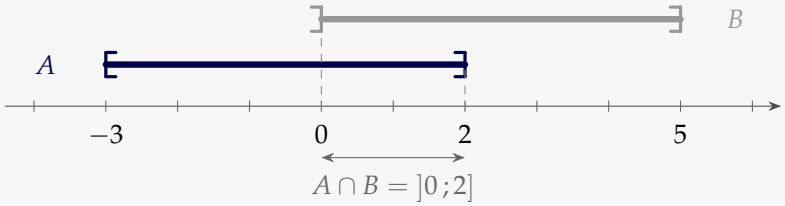
Les deux intervalles sur la même droite graduée : l'intersection est la zone couverte deux fois, la réunion va de -1 à 7.

- $]-\infty\,;1] \cap [3\,;+\infty[= \varnothing$: aucun réel n'est à la fois $\leqslant 1$ et $\geqslant 3$.
- $[0\,;2] \cup [5\,;6]$ ne se simplifie pas : cette réunion n'est pas un intervalle (il y a un « trou »).

Méthode 2.3 — Lire $\cap$ et $\cup$ sur un axe

1. Tracer *un seul* axe gradué et hachurer chaque intervalle d'une couleur.
2. L'**intersection** est la zone hachurée *deux fois* ; la **réunion**, la zone hachurée *au moins une fois*.
3. Examiner chaque borne séparément : elle est dans l'intersection si elle est dans *les deux* ensembles.

Exemple : pour $A = [-3\,;2]$ et $B =]0\,;5]$, l'axe donne $A \cap B =]0\,;2]$ et $A \cup B = [-3\,;5]$:



La borne 0 est exclue de l'intersection (elle n'est pas dans B) ; la borne 2 y est incluse (elle est dans les deux).

Attention — « et » / « ou »

En mathématiques, « ou » n'est pas exclusif : un réel de $[2\,;4]$ appartient bien à $[-1\,;4]\cup[2\,;7]$, même s'il est dans les deux. Retenez : $\cap$ traduit **et**, $\cup$ traduit **ou**.

3. Valeur absolue et distance

Définition 3.1 — Valeur absolue

La **valeur absolue** d'un réel a, notée $|a|$, est la **distance de a à 0** sur la droite graduée :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Exemple 3.2

$|7| = 7\,;\quad |-3| = 3\,;\quad |0| = 0\,;\quad |\sqrt{2}-2| = 2-\sqrt{2}$ car $\sqrt{2} < 2$: quand le contenu est négatif, la valeur absolue en prend l'*opposé*.

Propriété 3.3 — Premières propriétés

Pour tous réels a et b :

$$|a| \geqslant 0 \qquad |-a| = |a| \qquad \big(|a| = 0 \iff a = 0\big) \qquad |ab| = |a| \times |b| \qquad \sqrt{a^2} = |a|.$$

Définition 3.4 — Distance entre deux réels

La **distance** entre deux réels a et b est

$$d(a\,;b) = |b-a| = |a-b|.$$

Exemple : $d(-2\,;5) = |5-(-2)| = 7$ — l'ordre des deux nombres n'a pas d'importance.

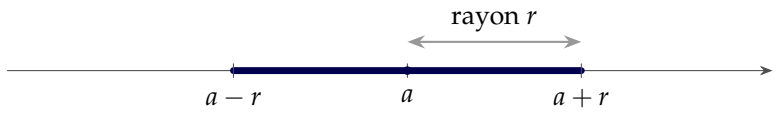
Théorème 3.5 — Valeur absolue et intervalle

Soient a un réel et $r \geqslant 0$:

$$|x-a| \leqslant r \iff a-r \leqslant x \leqslant a+r \iff x \in [a-r\,;a+r]$$

$$|x-a| = r \iff x = a-r \text{ ou } x = a+r.$$

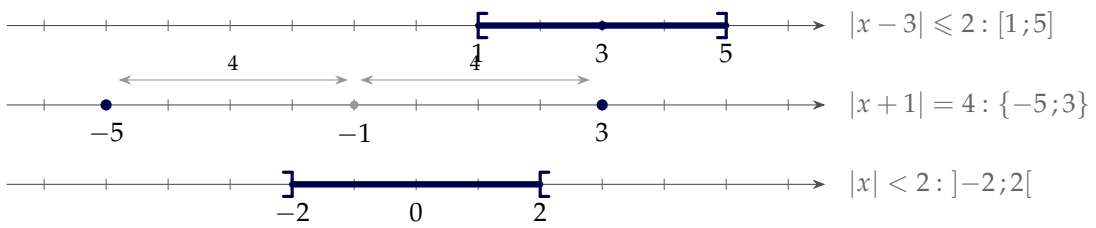
L'ensemble des réels situés à une distance d'au plus r de a est l'intervalle **de centre a et de rayon r**.



L'inégalité $|x-a| \leqslant r$ se lit : « x est à une distance d'au plus r du centre a ».

Exemple 3.6 — Résolutions

- $|x-3| \leqslant 2$: les réels à distance au plus 2 de 3, soit $x \in [1\,;5]$.
- $|x+1| = 4$: on écrit $x+1 = x-(-1)$, le centre est -1 : $x = -1-4 = -5$ ou $x = -1+4 = 3$.
- $|x| < 2$: centre 0, rayon 2, bornes exclues : $x \in \,]-2\,;2[$.



Les trois résolutions lues sur la droite graduée : un segment fermé, deux points à distance 4 du centre -1, un segment ouvert.

Méthode 3.7 — Passer de l'intervalle à la valeur absolue

Tout intervalle fermé $[m\,;M]$ s'écrit $|x-a| \leqslant r$ avec :

1. le **centre** $a = \dfrac{m+M}{2}$ (le milieu) ;
2. le **rayon** $r = \dfrac{M-m}{2}$ (la demi-longueur).

Exemple : $[2\,;8]$ a pour centre 5 et pour rayon 3, donc $x \in [2\,;8] \iff |x-5| \leqslant 3$.

Attention — Deux pièges classiques

$|x+1|$ est une distance à -1, pas à 1 : toujours réécrire $x+1 = x-(-1)$.
Et $\sqrt{x^2} = |x|$, pas x : pour $x = -4$, $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4|$.

4. Encadrements et valeurs approchées

Définition 4.1 — Encadrement

Encadrer un réel x, c'est trouver deux nombres a et b tels que $a \leqslant x \leqslant b$. Le nombre $b-a$ est l'**amplitude** de l'encadrement : plus elle est petite, plus l'encadrement est précis.

Définition 4.2 — Valeur approchée, arrondi

Soit n un entier naturel. Un nombre d est une **valeur approchée de x à 10^{-n} près** lorsque

$$|x-d| \leqslant 10^{-n}.$$

Si de plus $d \leqslant x$, l'approximation est **par défaut** ; si $d \geqslant x$, elle est **par excès**. L'**arrondi** de x à 10^{-n} près est celle des deux valeurs (par défaut ou par excès, à 10^{-n} près) qui est la plus proche de x.

Exemple 4.3 — Autour de π et de $\sqrt{2}$

De $\pi = 3{,}14159\ldots$ on tire l'encadrement d'amplitude 10^{-2} :

$$3{,}14 \leqslant \pi \leqslant 3{,}15.$$

3,14 est la valeur approchée par défaut au centième, 3,15 la valeur par excès, et l'arrondi au centième est 3,14 (car π est plus proche de 3,14).
De même $1{,}414 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1{,}415$, et l'arrondi de $\sqrt{2}$ au millième est 1,414.

Remarque — La valeur absolue mesure l'erreur

« d est une valeur approchée de x à 10^{-n} près » se traduit exactement par $|x - d| \leqslant 10^{-n}$: c'est le théorème 3.5 appliqué au calcul numérique. Encadrement, distance et approximation sont trois visages de la même idée.

Méthode 4.4 — Encadrer une expression

À partir de $1{,}414 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1{,}415$:
1. multiplier par un nombre *positif* conserve l'ordre : $4{,}242 \leqslant 3\sqrt{2} \leqslant 4{,}245$;
2. ajouter un même nombre conserve l'ordre : $3{,}414 \leqslant 2 + \sqrt{2} \leqslant 3{,}415$;
3. multiplier par un nombre *négatif* renverse les deux inégalités : $-1{,}415 \leqslant -\sqrt{2} \leqslant -1{,}414$.

5. Avec Python : `abs` et `round`

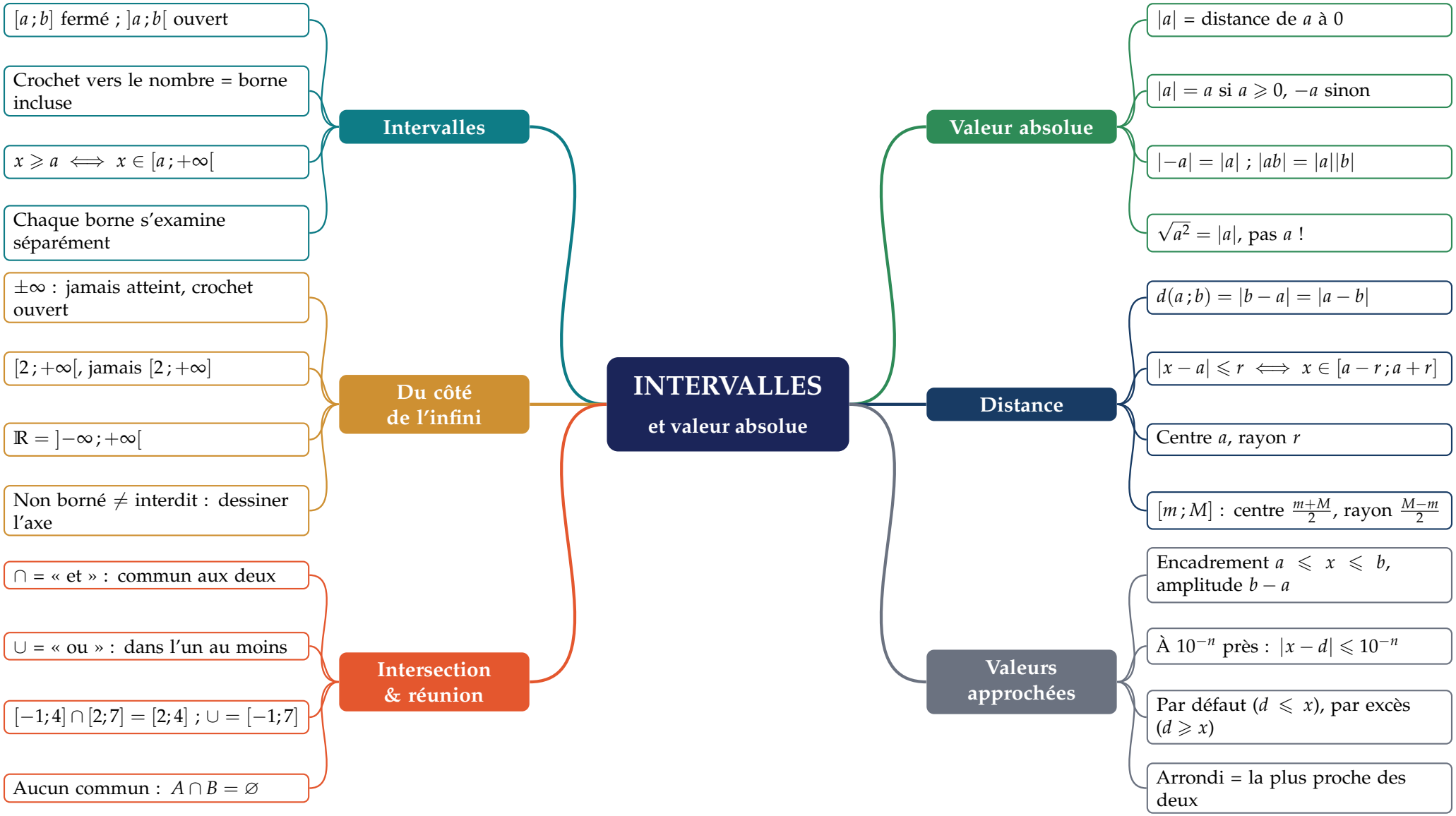
La valeur absolue et l'arrondi sont deux fonctions natives de Python :

```
>> abs(-3.5)
3.5
>> round(3.14159, 2)
3.14
>> abs(1.414 - 2 ** 0.5) <= 10 ** (-3)
True
```

`abs(x)` calcule $|x|$ et `round(x, n)` arrondit x à 10^{-n} près. Le dernier test vérifie que 1,414 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près : c'est la définition 4.2, écrite telle quelle en Python.

Remarque — Les trois réflexes du chapitre

1. Le crochet est toujours ouvert du côté de l'infini, et chaque borne s'examine séparément. 2. Lire $|x - a| \leqslant r$ comme une phrase : « x est à distance au plus r de a ». 3. Contrôler toute valeur approchée par un encadrement, et mesurer l'erreur avec la valeur absolue.



Chapitre 2 · Chaque branche renvoie à une section du cours et à une fiche méthode.