Seconde

Fonctions : généralités

Cours

I. Généralités

1. Définition

Définition

Soit D une partie de l'ensemble des nombres réels.
Une **fonction** f définie sur D est un procédé qui permet d'associer à tout nombre x, élément de D, un nombre réel **unique** y.

On note : $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto y$ « f qui à x associe y »
$y = f(x)$ « f de x égale y »

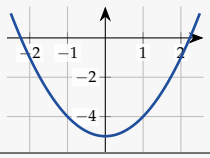
2. Vocabulaire

Définition — vocabulaire

D est **l'ensemble de définition** de la fonction. C'est en général un intervalle ou une réunion d'intervalles.
Le nombre de départ, x, est appelé **la variable**.
y, le nombre associé à x par f, est appelé **l'image de** x par f et est noté $f(x)$ « f de x ».
x est **un antécédent de** y par f.

Remarque

Chaque réel de l'ensemble de définition a **une seule image** par la fonction, mais un réel de l'ensemble image peut avoir **plusieurs antécédents**.
Une fonction peut être connue par une **formule**, un **tableau de valeurs** ou un **graphique** :

une formule	un tableau de valeurs	un graphique
$f(x) = x^2 - 5$	x : -2 -1 0 1 2 ; $f(x)$: -1 -4 -5 -4 -1	

3. Méthode pour une fonction définie par une formule

Méthode

Pour déterminer **l'image** d'un réel par une fonction définie par une formule, il suffit de **remplacer** x **par la valeur désirée**.
Pour déterminer **le ou les antécédents** par f d'un réel k, il suffit de **résoudre l'équation** $f(x) = k$.

Exemple

Avec $f(x) = x^2 - 5$: l'image de 3 est $f(3) = 3^2 - 5 = 4$.
Les antécédents de 4 sont les solutions de l'équation $x^2 - 5 = 4$, c'est-à-dire $x^2 = 9$: ce sont 3 et -3.

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;4]$ par : $f(x) = x^2 - 5$.

1. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1	$-0{,}5$	0	1	$1{,}2$	$\sqrt{3}$	$2{,}43$	$3{,}01$	4
x^2-5										

2. Compléter les expressions suivantes :
   a. L'ensemble de définition de f est .....
   b. L'image de 4 par f est .....
   c. Les antécédents de -4 par f sont .....
   d. On a : f : ..... $\longmapsto -2$
   e. On a : $f(2{,}43) =$ ..... et $f($ ..... $) = -5$
3. Calculer $f\left(\frac{7}{3}\right)$ et $f\left(-\frac{3}{4}\right)$.

.....

.....

.....

.....

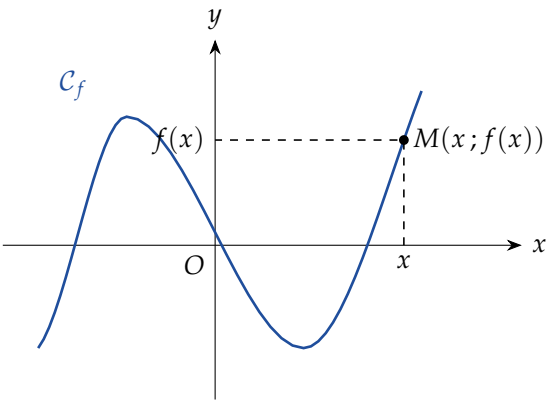
II. Courbe représentative d'une fonction

1. Définition

Définition

Le plan étant muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on appelle **courbe représentative** (ou **représentation graphique**) d'une fonction f l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;f(x))$ avec x parcourant l'ensemble de définition de f.

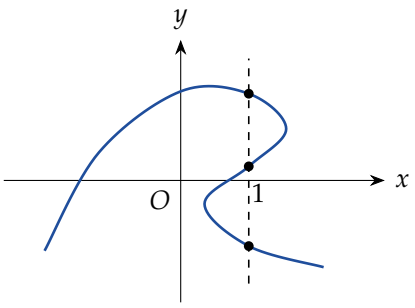
$y = f(x)$ est **l'équation de la courbe** représentative de f dans ce repère.



Les points de la courbe sont donc les points pour lesquels **l'ordonnée est l'image de l'abscisse**.

Remarque

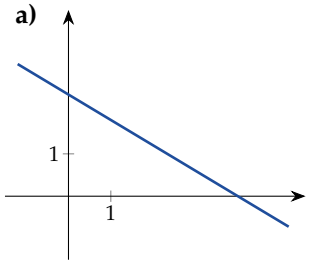
Un réel n'ayant qu'**une seule image**, la courbe ci-contre **ne peut pas** être la représentation graphique d'une fonction. En effet, le réel 1, par exemple, aurait plusieurs images par la fonction f.



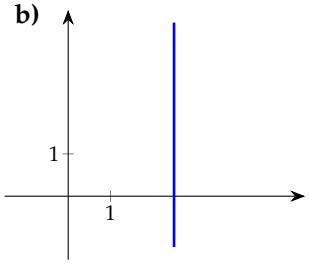
Exercice 2

Dans chacun des cas, dire si la représentation graphique est celle d'une fonction ou non. Justifier.

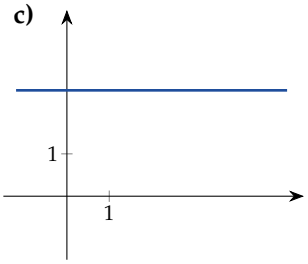
a)



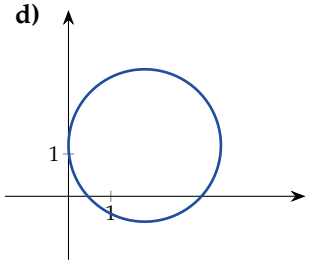
b)



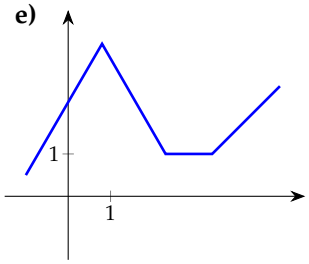
c)



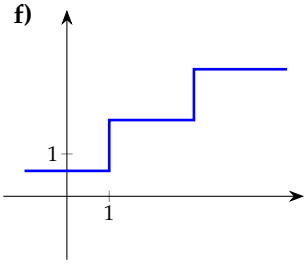
d)



e)



f)



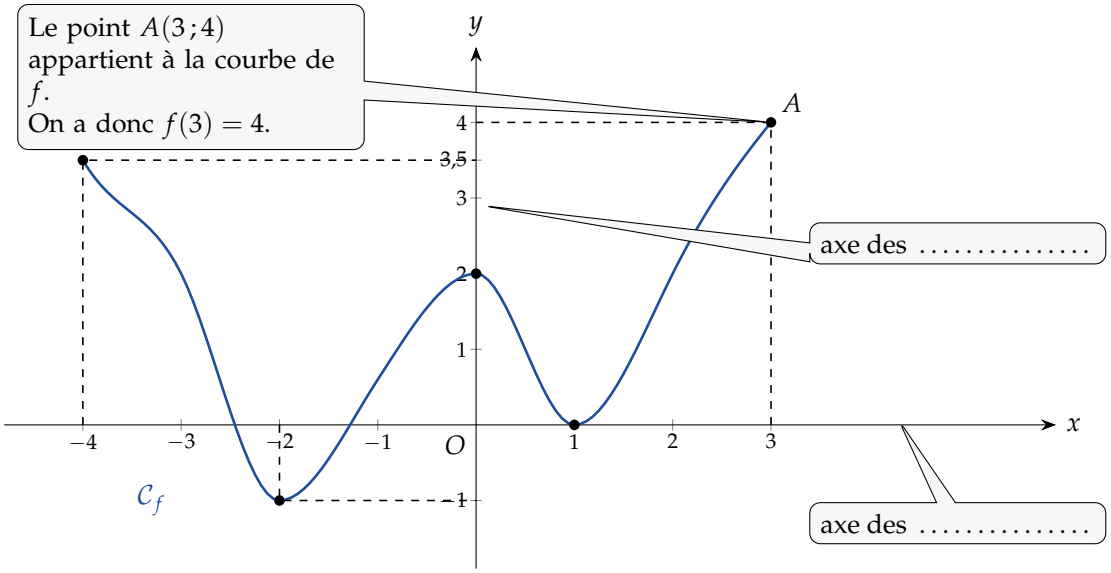
.....

.....

.....

.....

Exercice 3 — lecture graphique



Compléter :

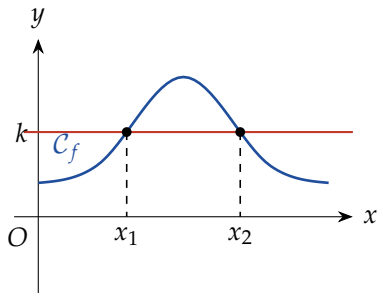
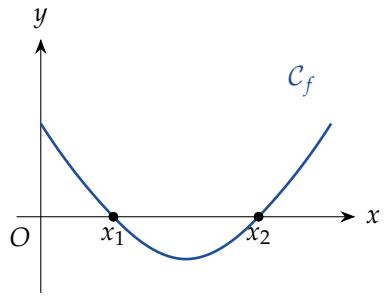
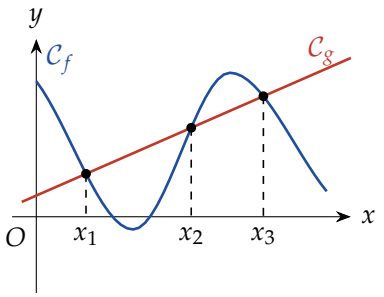
a. L'ensemble de définition de f est .....

b. L'image de -4 par la fonction f est .....

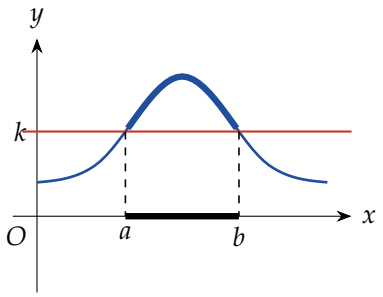
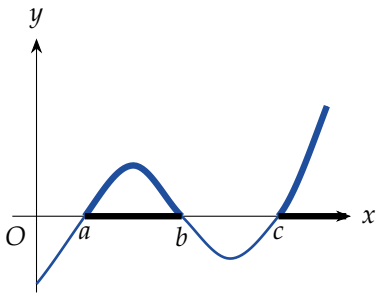
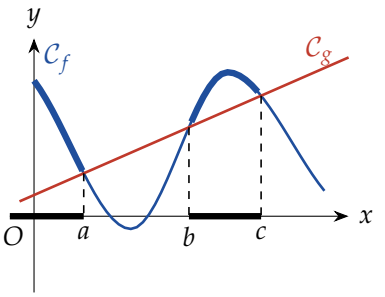
c. Un antécédent de -1 par f est .....

d. Les antécédents de 2 par f sont .....

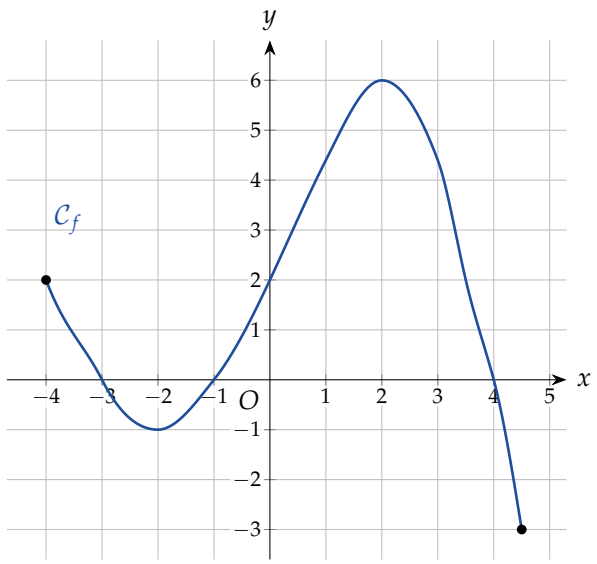
2. Résolution graphique d'équations

$f(x) = k$	$f(x) = 0$	$f(x) = g(x)$
Les solutions sont les **abscisses** des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ dont **l'ordonnée est** k.	Les solutions sont les **abscisses** des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec **l'axe des abscisses**.	Les solutions sont les **abscisses** des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
		

3. Résolution graphique d'inéquations

$f(x) \geqslant k$	$f(x) \geqslant 0$	$f(x) \geqslant g(x)$
Les solutions sont les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ dont l'ordonnée est **supérieure ou égale** au nombre k.	Les solutions sont les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés **au-dessus** de l'axe des abscisses.	Les solutions sont les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés **au-dessus** de la courbe $\mathcal{C}_g$.
		
$x \in [a\,;b]$	$x \in [a\,;b] \cup [c\,;+\infty[$	$x \in]-\infty\,;a] \cup [b\,;c]$

Exercice 4



Le graphique ci-contre représente une fonction f définie sur $[-4\,;4{,}5]$. En utilisant ce graphique :

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 6$.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 2$.
4. Résoudre l'inéquation $f(x) > 6$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

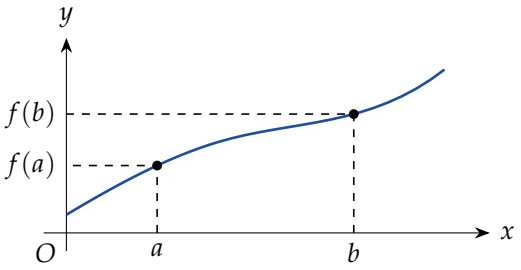
III. Variations d'une fonction

1. Définition

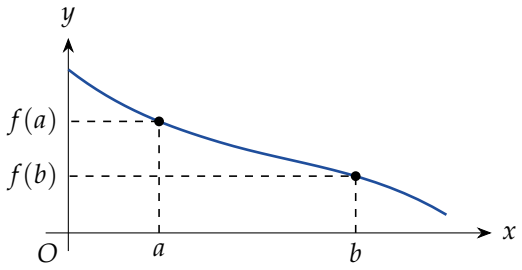
Définition

Soit f une fonction définie sur D et I un intervalle de D.
On dit que f est **croissante** sur I lorsque, quels que soient les nombres a et b de I : si $a \leqslant b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$.
On dit que f est **décroissante** sur I lorsque, quels que soient les nombres a et b de I : si $a \leqslant b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$.
On dit que f est **constante** sur I lorsque, quels que soient a et b de I : si $a \leqslant b$ alors $f(a) = f(b) = k$, où k est une constante réelle.

Illustration :



f est **croissante** car pour a inférieur à b, $f(a)$ est aussi inférieur à $f(b)$.
La courbe « **monte** » entre a et b.



f est **décroissante** car pour a inférieur à b, $f(a)$ est supérieur à $f(b)$.
La courbe « **descend** » entre a et b.

Remarque

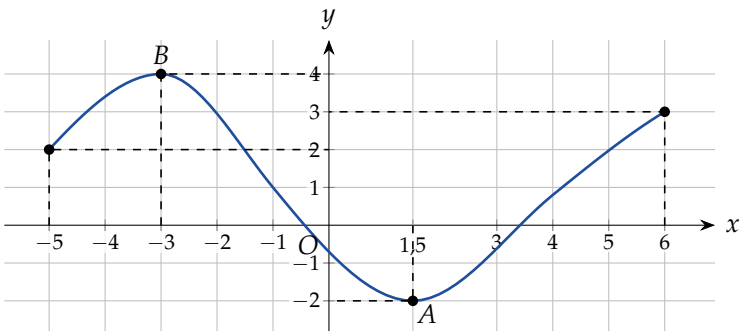
On dit aussi qu'une fonction est **croissante** si deux nombres et leurs images sont rangés **dans le même ordre** ($a \leqslant b$ et $f(a) \leqslant f(b)$), et qu'une fonction est **décroissante** si deux nombres et leurs images sont rangés **dans l'ordre inverse** ($a \leqslant b$ et $f(a) \geqslant f(b)$).

2. Tableau de variation

Les variations d'une fonction f sur son ensemble de définition peuvent être traduites par un tableau appelé **tableau de variation** de la fonction f.

Exemple

Les variations de la fonction f représentée par la courbe ci-contre sont données par le tableau ci-dessous.

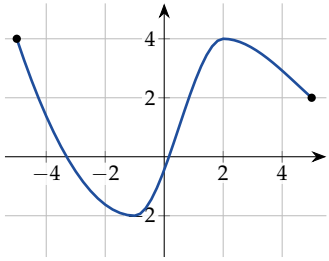


x	-5		-3		$1{,}5$		6
$f(x)$	2	↗	4	↘	-2	↗	3

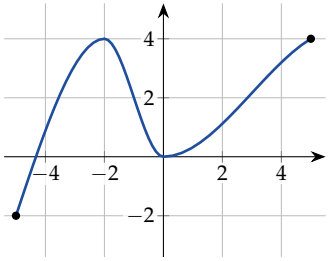
Exercice 5

Pour chacune des courbes suivantes, établir le tableau de variation correspondant.

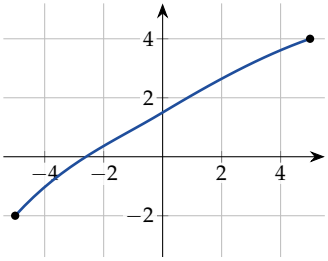
Courbe a



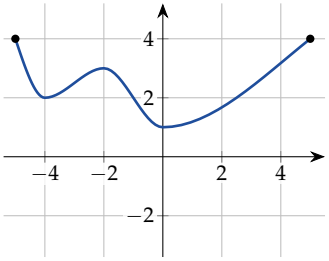
Courbe b



Courbe c



Courbe d



Courbe a

x	
$f(x)$	

Courbe b

x	
$f(x)$	

Courbe c

x	
$f(x)$	

Courbe d

x	
$f(x)$	

IV. Minimum, maximum d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
La fonction f admet un **maximum** M atteint en $x = a$ si $f(a) = M$ et si $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in I$.
La fonction f admet un **minimum** m atteint en $x = a$ si $f(a) = m$ et si $f(x) \geqslant f(a)$ pour tout $x \in I$.
Les maximums et les minimums sont appelés des **extremums**.

Attention

Les extremums sont des **valeurs réelles**, images prises par la fonction, et se lisent sur **l'axe des ordonnées**.
Ce ne sont surtout pas des points.

Exemple — à compléter

La fonction f définie précédemment (exemple du III.2) admet sur $[-5;6]$ un minimum égal à ..... atteint pour $x =$ .....

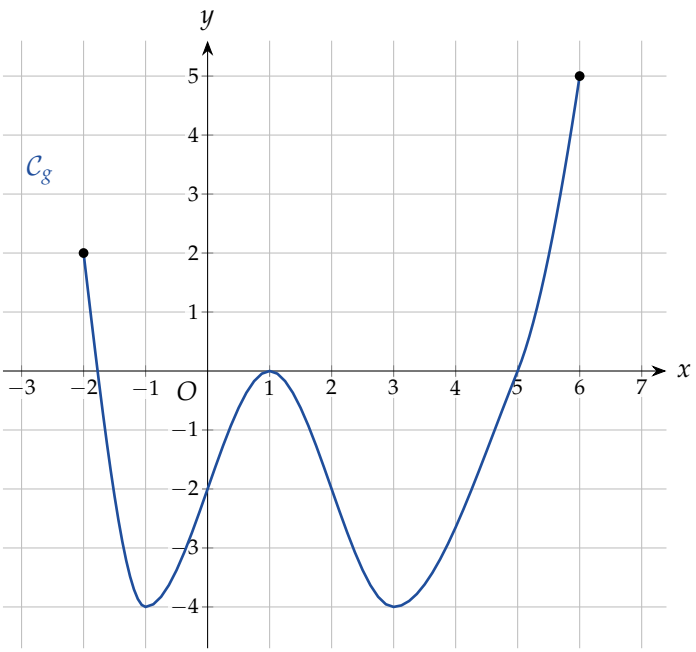
La fonction f définie précédemment admet sur $[-5;6]$ un maximum égal à ..... atteint pour $x =$ .....

Exercice 6

On considère la fonction g définie par sa représentation graphique ci-contre.

Dresser le tableau de variation complet de la fonction g.

x	
$f(x)$	



Exercice 7

On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[-5\,;10]$.

x	-5		2		4		10
$f(x)$	8	↘	1	↗	9	↘	3

En justifiant, comparer les nombres suivants :

a. $f(-3)$ et $f(1)$

b. $f(7{,}8)$ et $f(8{,}2)$

c. $f(3)$ et $f(\sqrt{10})$

d. $f(2)$ et $f(8)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

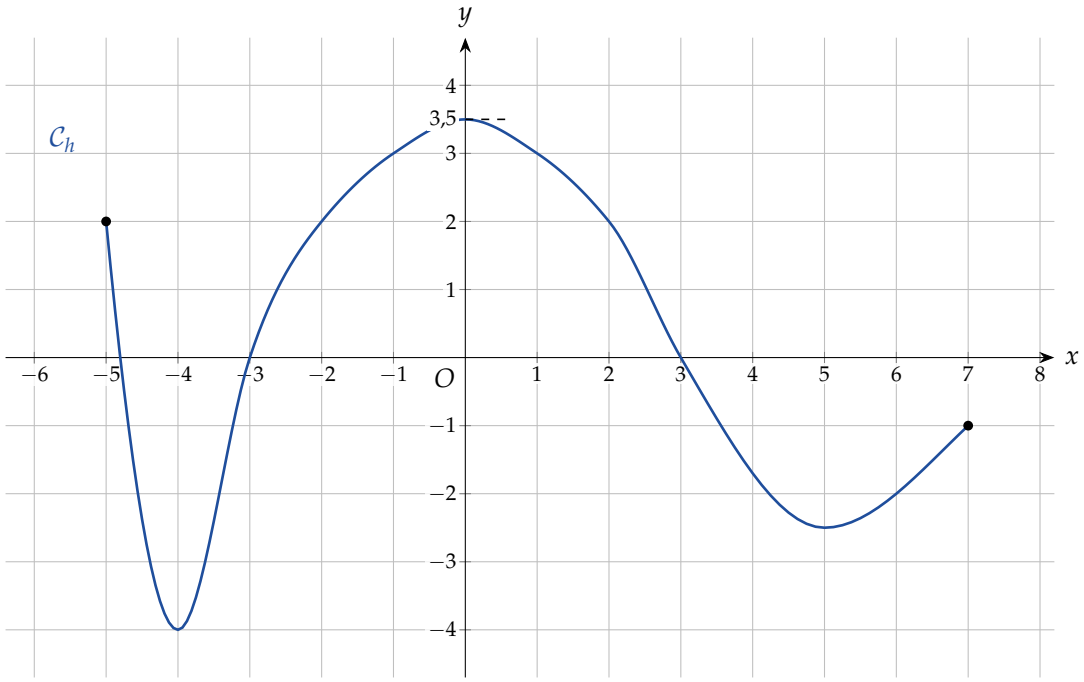
.....

.....

.....

.....

Exercice 8



Soit h la fonction définie par la représentation graphique ci-dessus.

a. Déterminer l'ensemble de définition de h. .....

b. Donner le tableau de variation de la fonction h.

x	
$f(x)$	

c. Donner les extremums de la fonction en précisant où ils sont atteints.

.....

.....

.....

d. Résoudre graphiquement l'équation $h(x) = 2$.

.....

.....

.....

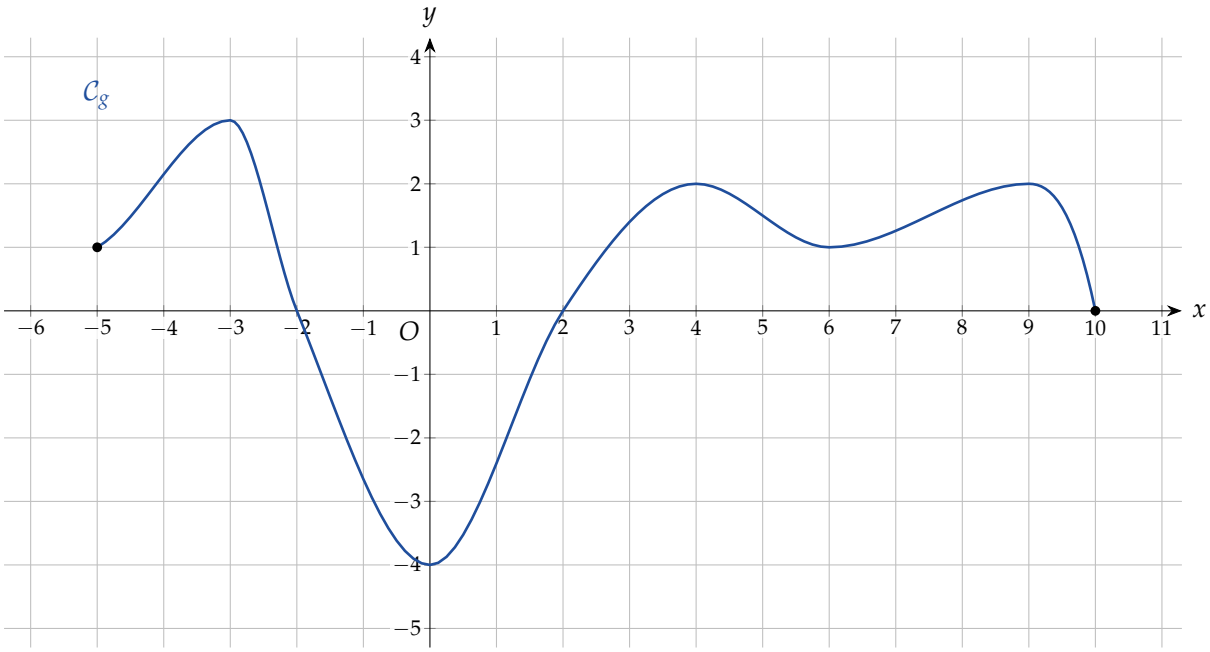
e. Résoudre graphiquement l'inéquation $h(x) \geqslant 3$.

.....

.....

.....

Exercice 9



a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g représentée par le graphique ci-dessus.

.....

b. Dresser le tableau de variation de g.

x	
$f(x)$	

c. Déterminer les extremums de g et les valeurs de x pour lesquelles ils sont atteints.

.....

.....

.....

.....

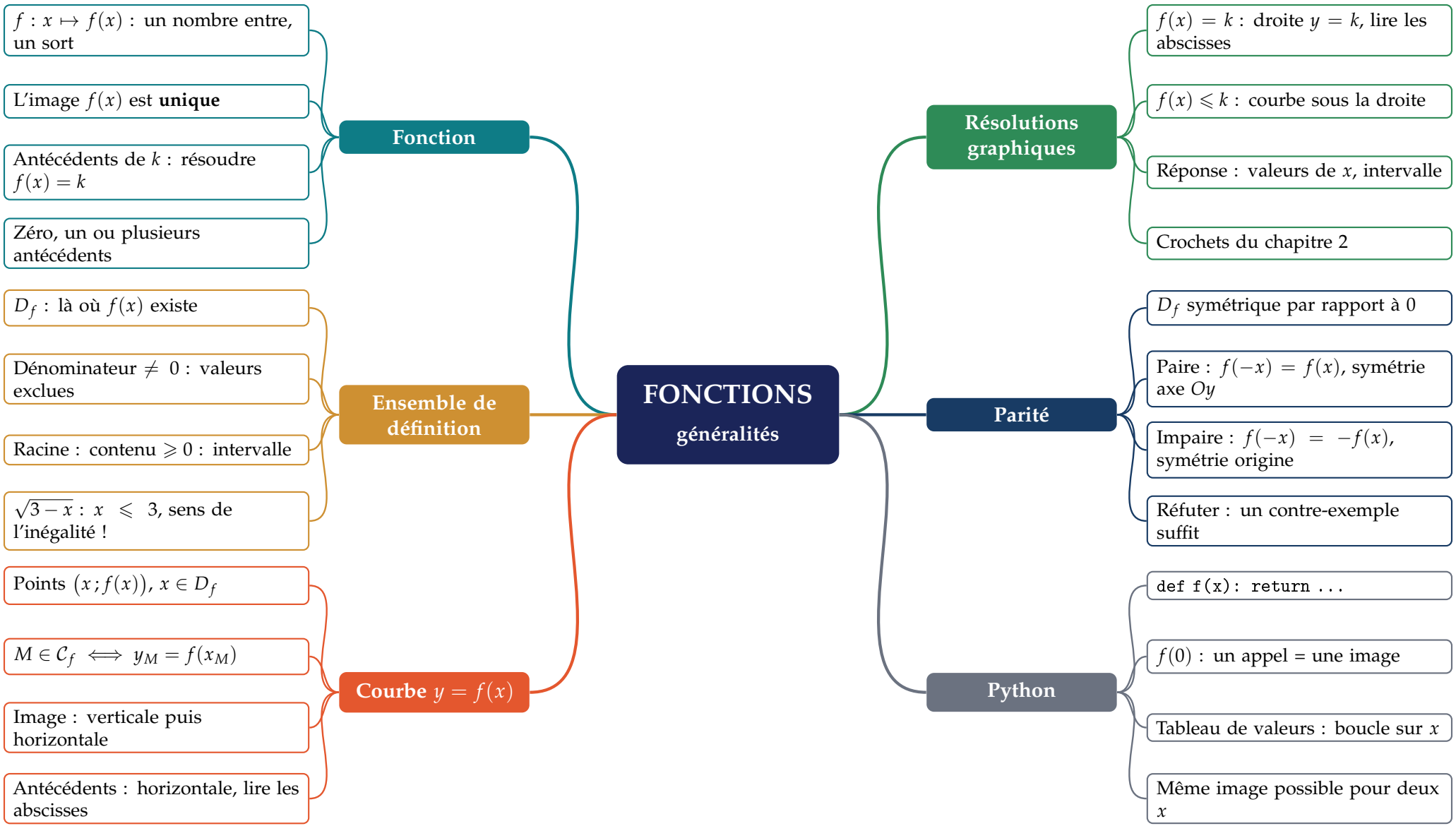
d. À quel intervalle appartient $g(x)$ si x appartient à l'intervalle $[-2;6]$?

.....

.....

.....

.....



Chapitre 3 · Chaque branche renvoie à une section du cours et à une fiche méthode.