Chapitre 4. Cours

Variations de fonctions

1. Fonctions croissantes, fonctions décroissantes

Le chapitre 3 décrivait une fonction point par point. Celui-ci décrit son *mouvement* : monte-t-elle, descend-elle, et sur quels intervalles ? C'est l'information la plus utile que l'on puisse donner sur une fonction.

Définition 1.1 — Sens de variation

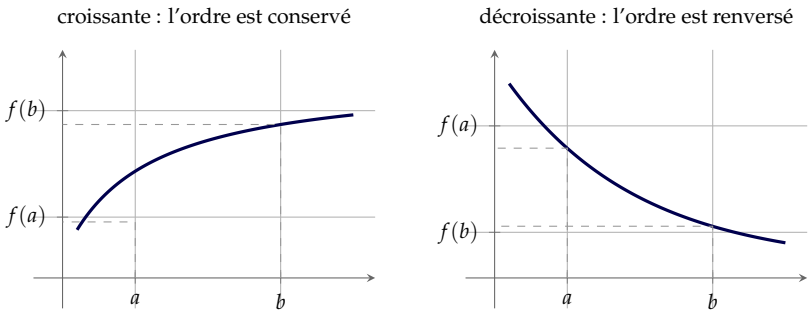
Soit f définie sur un intervalle I.

- f est **croissante** sur I lorsque, pour tous a et b de I : si $a < b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$.
- f est **décroissante** sur I lorsque, pour tous a et b de I : si $a < b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$.

Avec des inégalités *strictes* entre $f(a)$ et $f(b)$, on dit **strictement** croissante ou décroissante.

Remarque — La bonne façon de le dire

Une fonction croissante **conserve l'ordre** : les images sont rangées comme les nombres de départ. Une fonction décroissante **renverse l'ordre**. Cette formulation servira sans arrêt au chapitre suivant — et dès la section 4.



À gauche, $a < b$ donne $f(a) < f(b)$; à droite, $a < b$ donne $f(a) > f(b)$.

Attention — Sur un intervalle, jamais sur une réunion

Un sens de variation s'énonce **sur un intervalle**. La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ *et* sur $]0\,;+\infty[$, mais pas « sur $\mathbb{R}^*$ » : $-1 < 1$ alors que $\dfrac{1}{-1} < \dfrac{1}{1}$.

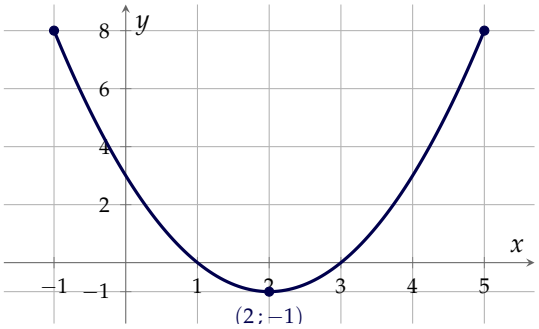
2. Tableau de variations

Définition 2.1 — Tableau de variations

Le **tableau de variations** de f résume son sens de variation : la première ligne porte les bornes des intervalles, la seconde des **flèches** (montante ou descendante) avec les **valeurs de** f aux extrémités de chaque flèche.

Exemple 2.2 — Le fil rouge du chapitre

Soit f définie sur $[-1\,;5]$ par $f(x) = (x-2)^2 - 1$. Sa courbe et son tableau :



x	-1		2		5
$f(x)$	8	↘	-1	↗	8

f est strictement décroissante sur $[-1\,;2]$, strictement croissante sur $[2\,;5]$.

Méthode 2.3 — Lire un tableau de variations

1. Les **flèches** donnent le sens de variation sur chaque intervalle de la première ligne.
2. Les **valeurs** aux extrémités des flèches sont des images : ci-dessus, $f(-1) = 8$, $f(2) = -1$, $f(5) = 8$.
3. Entre deux valeurs du tableau, la fonction ne prend **que** des valeurs intermédiaires : le tableau permet d'encadrer $f(x)$.

3. Extremums

Définition 3.1 — Maximum, minimum

Soit f définie sur un intervalle I et $c \in I$.

- $f(c)$ est le **maximum** de f sur I lorsque, pour tout x de I, $f(x) \leqslant f(c)$.
- $f(c)$ est le **minimum** de f sur I lorsque, pour tout x de I, $f(x) \geqslant f(c)$.

On dit que l'extremum est **atteint en** c.

Exemple 3.2

Pour la fonction fil rouge sur $[-1\,;5]$: le **minimum** vaut -1, atteint en 2 — c'est le creux du tableau. Le **maximum** vaut 8, atteint en -1 *et* en 5 : un extremum peut être atteint plusieurs fois.

Attention — Une valeur et une position

Un extremum est une **valeur** de la fonction (« le minimum vaut -1 »), atteinte en une ou plusieurs **abscisses** (« en $x = 2$ »). Confondre les deux — répondre « le minimum est 2 » — est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

4. Comparer des images sans les calculer

Propriété 4.1 — Variations et comparaison

Soient a et b dans un intervalle I avec $a \leqslant b$.

- Si f est croissante sur I, alors $f(a) \leqslant f(b)$: les images sont dans le **même ordre**.
- Si f est décroissante sur I, alors $f(a) \geqslant f(b)$: les images sont dans l'**ordre contraire**.

Exemple 4.2

La fonction fil rouge est croissante sur $[2\,;5]$: comme $3 < 4{,}5$, on a $f(3) < f(4{,}5)$ — sans calculer.
Elle est décroissante sur $[-1\,;2]$: comme $0 < 1$, on a $f(0) > f(1)$.

Méthode 4.3 — Encadrer $f(x)$ à l'aide du tableau

Pour $x \in [2\,;5]$, la flèche montante va de -1 à 8 : donc $-1 \leqslant f(x) \leqslant 8$.

1. Repérer l'intervalle du tableau qui contient x.
2. Lire les valeurs aux deux bouts de la flèche : ce sont les bornes de l'encadrement.
3. Sur tout $[-1\,;5]$, prendre le minimum et le maximum globaux : $-1 \leqslant f(x) \leqslant 8$.

5. Démontrer un sens de variation

Méthode 5.1 — Revenir à la définition

Pour démontrer que f est croissante sur I :

1. prendre deux réels quelconques a et b de I avec $a < b$;
2. étudier le **signe de la différence** $f(b) - f(a)$, en factorisant ;
3. conclure : différence positive $\to$ croissante ; négative $\to$ décroissante.

Démonstration — $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$

Soient $0 \leqslant a < b$. Alors

$$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a).$$

Or $b - a > 0$ (car $a < b$) et $b + a > 0$ (car $a \geqslant 0$ et $b > 0$) : le produit est strictement positif, donc $a^2 < b^2$. ■

Démonstration — Une fonction affine suit le signe de son coefficient

Soit $f(x) = mx + p$ et $a < b$. Alors

$$f(b) - f(a) = (mb + p) - (ma + p) = m\,(b - a).$$

Comme $b - a > 0$, la différence a le signe de m : f est strictement croissante si $m > 0$, strictement décroissante si $m < 0$, constante si $m = 0$. ■

Attention — Des exemples ne prouvent rien

Vérifier que $f(1) < f(2) < f(3)$ ne démontre pas la croissance : il faut la différence $f(b) - f(a)$ pour des réels $a < b$ **quelconques**. Les valeurs numériques illustrent, la lettre démontre.

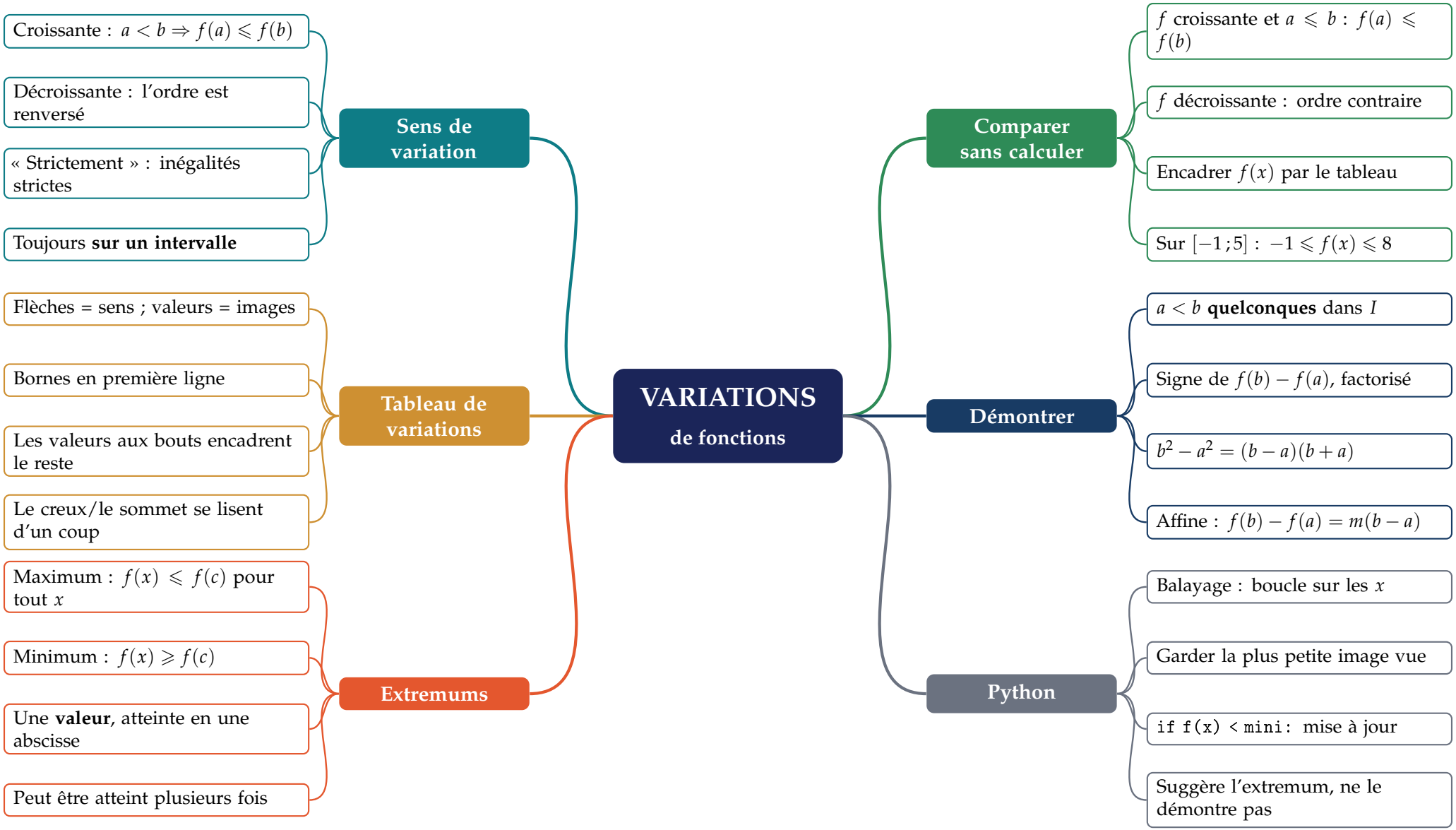
6. Avec Python : chercher un minimum par balayage

```
>> def f(x):
...   return (x - 2) ** 2 - 1
...
>> mini = f(-1)
>> pos = -1
>> for k in range(-10, 51):
...   x = k / 10
...   if f(x) < mini:
...      mini = f(x)
...      pos = x
...
>> (pos, mini)
(2.0, -1.0)
```

Le programme **balaie** l'intervalle $[-1\,;5]$ au pas de 0,1 et garde la plus petite image rencontrée : il retrouve le minimum -1 atteint en 2, lu dans le tableau de variations. Le balayage *suggère* l'extremum ; seule l'étude de la section 5 le *démontre*.

Remarque — Les trois réflexes du chapitre

1. Croissante = ordre conservé, décroissante = ordre renversé : tout le chapitre tient dans cette phrase. 2. Dans un tableau, les valeurs aux bouts des flèches sont des images — elles encadrent toutes les autres. 3. Pour démontrer une variation : $a < b$ quelconques, signe de $f(b) - f(a)$, factorisation.



Chapitre 4 · Chaque branche renvoie à une section du cours et à une fiche méthode.