DEVOIR SURVEILLÉ

Variations de fonctions

Durée : 1 heure · Sans calculatrice

Barème indicatif : Exercice 1 (4 pts) · Exercice 2 (5 pts) · Exercice 3 (5 pts) · Exercice 4 (6 pts).
Les exercices sont indépendants. Toute réponse doit être justifiée.

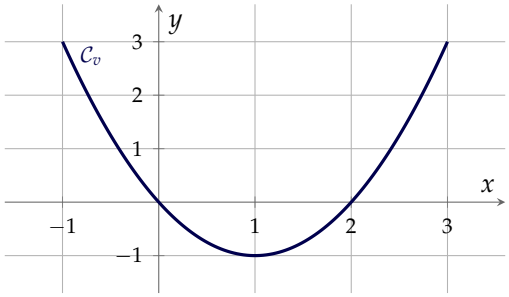
Exercice 1 — Vrai / Faux (4 points)

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant (démonstration ou contre-exemple).

1. Si f est décroissante sur $[0\,;5]$, alors $f(2) \geqslant f(4)$.
2. La fonction $x \mapsto -3x+1$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Un maximum peut être atteint en deux abscisses différentes.
4. Si $f(0) < f(1)$, alors f est croissante sur $[0\,;1]$.

Exercice 2 — De la courbe au tableau (5 points)

La fonction v est définie sur $[-1\,;3]$ par $v(x) = x^2 - 2x$; sa courbe est donnée ci-dessous.



1. Donner, par lecture, le sens de variation de v sur $[-1\,;1]$ puis sur $[1\,;3]$.
2. Calculer $v(-1)$, $v(1)$ et $v(3)$.
3. Dresser le tableau de variations de v sur $[-1\,;3]$.
4. Donner le minimum de v sur $[-1\,;3]$ et l'abscisse où il est atteint. Le maximum est-il atteint en une seule abscisse ?

Exercice 3 — Démonstration et comparaison (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + 1$.

1. Soient $0 \leqslant a < b$. Montrer que $f(b) - f(a) = (b-a)(b+a)$.
2. En déduire que f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
3. Sans calculer les images, comparer $f\left(\sqrt{2}\right)$ et $f(1{,}5)$, en justifiant.

Exercice 4 — Le bassin (6 points)

La hauteur d'eau d'un bassin, en centimètres, est modélisée sur $[0\,;12]$ (temps en heures) par une fonction H dont on donne le tableau de variations :

x	0		5		12
$H(x)$	30	↗	90	↘	50

1. Décrire l'évolution de la hauteur d'eau au cours des 12 heures.
2. Donner la hauteur maximale atteinte, et à quel instant.
3. Comparer, en justifiant, $H(2)$ et $H(4)$, puis $H(7)$ et $H(10)$.
4. Justifier que, pour tout x de $[5\,;12]$, on a $50 \leqslant H(x) \leqslant 90$.
5. Peut-on affirmer que $H(2) = 60$? Expliquer.