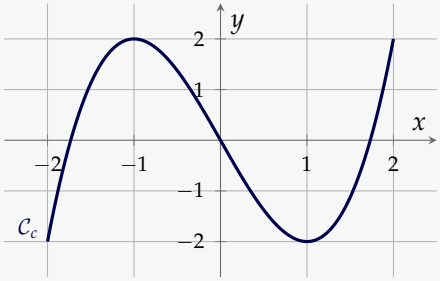
Chapitre 4. Fiche d'exercices n°1

Variations de fonctions

Les exercices 1, 2, 3 et 13 portent sur la fonction c représentée ci-dessous sur $[-2\,;2]$. Les exercices 4 et 7 portent sur la fonction t, définie sur $[0\,;7]$, dont on donne le tableau de variations.



x	0		3		7
$t(x)$	-5	↗	4	↘	1

Série A ⋆ — Automatismes

Exercice 1 ⋆

Donner, par lecture de la courbe, les intervalles sur lesquels c est croissante, puis ceux sur lesquels elle est décroissante.

Exercice 2 ⋆

Dresser le tableau de variations de c sur $[-2\,;2]$, en y portant les valeurs $c(-2)$, $c(-1)$, $c(1)$ et $c(2)$ lues sur la courbe.

Exercice 3 ⋆

Donner le maximum et le minimum de c sur $[-2\,;2]$, ainsi que les abscisses où chacun est atteint.

Exercice 4 ⋆

À l'aide du tableau de t : **a.** donner le sens de variation de t sur $[0\,;3]$ puis sur $[3\,;7]$; **b.** donner $t(0)$, $t(3)$ et $t(7)$; **c.** donner le maximum de t sur $[0\,;7]$ et l'abscisse où il est atteint.

Exercice 5 ⋆

Une fonction f est croissante sur $[1\,;4]$. Comparer, sans calcul et en justifiant : $f(2)$ et $f(3{,}5)$; $f(1)$ et $f(4)$.

Exercice 6 ⋆

Une fonction g est décroissante sur $[-3\,;0]$. Comparer $g(-2)$ et $g(-1)$.

Exercice 7 ⋆

À l'aide du tableau de t : justifier que, pour tout $x \in [3\,;7]$, on a $1 \leqslant t(x) \leqslant 4$.

Série B ⋆⋆ — Entraînement

Exercice 8 ⋆⋆

Donner le sens de variation de chaque fonction affine, en justifiant par le coefficient : $x \mapsto 3x-4$; $x \mapsto -2x+5$; $x \mapsto 7$; $x \mapsto \dfrac{1-x}{2}$.

Exercice 9 ⋆⋆

Soit $g(x) = (x-1)^2 + 2$ définie sur $[-2\,;4]$.

a. Calculer $g(-2)$, $g(1)$ et $g(4)$.
b. Dresser le tableau de variations de g (on admettra que g varie comme la fonction fil rouge du cours).
c. En déduire le minimum de g sur $[-2\,;4]$ et l'abscisse où il est atteint.

Exercice 10 ⋆⋆

Démontrer que la fonction carré $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.
On prendra $a < b \leqslant 0$ et on étudiera le signe de $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$.

Exercice 11 ⋆⋆

Démontrer, en revenant à la définition, que $x \mapsto 3x-4$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 ⋆⋆

Soit $u(x) = -(x-2)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

a. Justifier que $u(x) \leqslant 0$ pour tout réel x, et que $u(2) = 0$.
b. En déduire que u admet un maximum sur $\mathbb{R}$, en précisant sa valeur et où il est atteint.

Exercice 13 ⋆⋆

À l'aide du tableau de variations de c (exercice 2), donner le nombre de solutions de l'équation $c(x) = k$ sur $[-2\,;2]$: **a.** pour $k = 0$; **b.** pour $k = 2$; **c.** pour $k = 3$.

Exercice 14 ⋆⋆

La température d'un four, en degrés, est modélisée sur $[0\,;10]$ (temps en minutes) par une fonction T croissante sur $[0\,;6]$ puis décroissante sur $[6\,;10]$, avec $T(0) = 20$, $T(6) = 240$ et $T(10) = 180$.

a. Dresser le tableau de variations de T.
b. Quelle est la température maximale atteinte, et quand ?
c. Justifier que, entre les minutes 6 et 10, la température reste comprise entre 180 et 240 degrés.

Exercice 15 ⋆⋆

Vrai ou faux ? Justifier (une justification ou un contre-exemple).

a. Si f est croissante sur $[0\,;2]$ et sur $[2\,;5]$, alors f est croissante sur $[0\,;5]$.
b. Si f est décroissante sur $[0\,;4]$, alors $f(1) \geqslant f(3)$.

c. Le minimum d'une fonction peut être atteint en deux abscisses différentes.
d. Si $f(1) < f(2) < f(3)$, alors f est croissante sur $[1\,;3]$.

Série C ⋆⋆⋆ — Approfondissement

Exercice 16 ⋆⋆⋆

Démontrer que la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

On montrera que, pour $0 < a < b$ *:* $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab} > 0$.

Exercice 17 ⋆⋆⋆

Une fonction f est croissante sur $[0\,;5]$ et $f(1) = 3$.

a. Que peut-on affirmer sur $f(4)$?
b. Peut-on connaître la valeur exacte de $f(4)$? Expliquer.

Exercice 18 ⋆⋆⋆

Soit f une fonction croissante sur un intervalle I. Démontrer que la fonction $-f : x \mapsto -f(x)$ est décroissante sur I.

Exercice 19 ⋆⋆⋆

Soit $h(x) = (x-3)^2 + 1$ définie sur $[1\,;6]$. On admet que h est décroissante sur $[1\,;3]$ et croissante sur $[3\,;6]$.

a. Calculer $h(1)$, $h(3)$ et $h(6)$, puis dresser le tableau de variations de h.
b. En déduire un encadrement de $h(x)$ valable pour tout x de $[1\,;6]$.

Exercice 20 ⋆⋆⋆

Avec 20 mètres de grillage, on clôture un jardin rectangulaire de largeur x (en mètres, $0 < x < 10$). Son aire est $A(x) = x\,(10 - x)$.

a. Vérifier que $A(x) = 25 - (x-5)^2$.
b. En déduire que A admet un maximum sur $]0\,;10[$, en précisant sa valeur et la largeur correspondante.
c. Quelles sont alors les dimensions du jardin ? Commenter.