Seconde

Vecteurs

Cours

I. Notion de vecteur

1. Définition

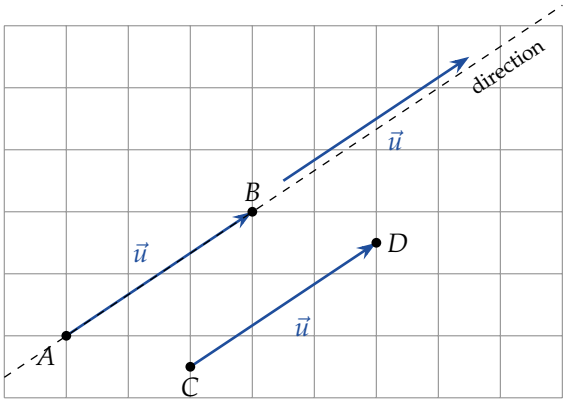
Définition

Un **vecteur** $\vec{u}$ est un objet mathématique caractérisé par :

- une **direction** ;
- un **sens** ;
- une **longueur**, appelée aussi **norme** et notée $\|\vec{u}\|$.

Si $\overrightarrow{AB}$ est un **représentant** du vecteur $\vec{u}$, alors :

- la direction de $\vec{u}$ est celle de la droite (AB) ;
- le sens de $\vec{u}$ est le sens de A vers B ;
- la norme de $\vec{u}$ est la longueur AB du segment $[AB]$.



Les flèches $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}\ldots$ sont des **représentants** du même vecteur $\vec{u}$: même direction, même sens, même longueur. On écrit $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Remarque

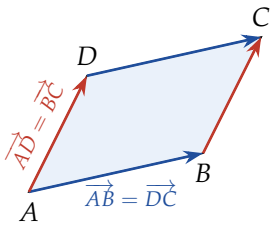
- La **translation** qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$: elle « glisse » toute la figure selon la direction, le sens et la longueur de $\overrightarrow{AB}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est l'**opposé** du vecteur $\overrightarrow{AB}$: même direction, même longueur, sens contraire. On note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \cdots$ est le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$. Il n'a ni direction ni sens, et sa norme est 0.

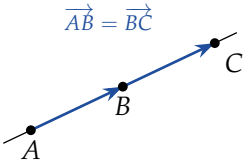
2. Égalité de vecteurs et parallélogramme

Deux vecteurs sont **égaux** lorsqu'ils ont la même direction, le même sens et la même norme : l'un est l'image de l'autre par une translation.

Propriété

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors $ABCD$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).
- Si $ABCD$ est un parallélogramme (éventuellement aplati), alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ si et seulement si B est le milieu de $[AC]$.



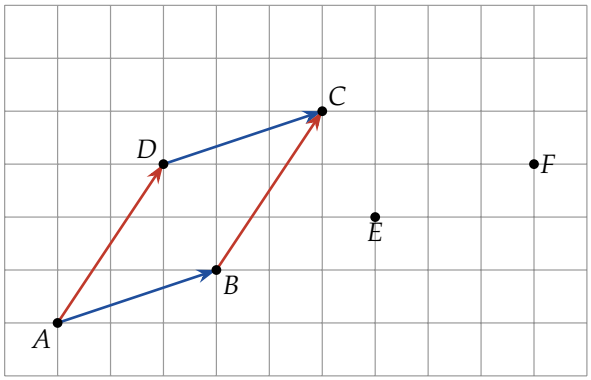


B milieu de $[AC]$

Attention à l'ordre des lettres : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ correspond au parallélogramme $ABCD$ (on « tourne » autour du quadrilatère : $A \to B \to C \to D$), pas à $ABDC$.

Exercice 1 : vecteurs égaux

Sur le quadrillage ci-contre, les points A, B, C, D, E et F sont placés.



a. Compléter : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D\ldots} = \overrightarrow{E\ldots}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{\ldots\ldots}$.

b. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier.

.....

.....

c. Placer le point H tel que $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$, puis le point K tel que B soit le milieu de $[AK]$. Que constate-t-on pour K ?

.....

.....

d. Citer deux vecteurs opposés de la figure :

.....

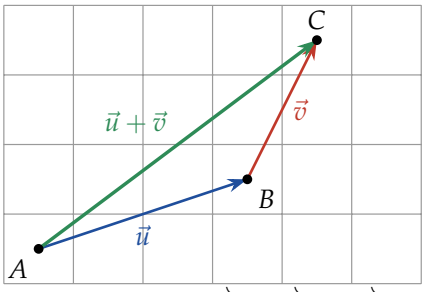
II. Somme de deux vecteurs

Propriété : relation de Chasles

A, B et C étant trois points du plan, la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. On écrit :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

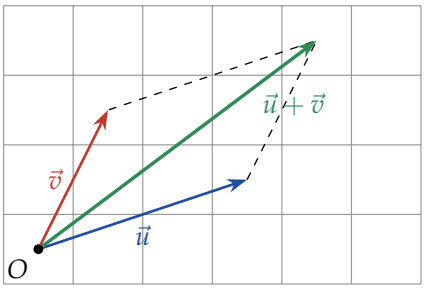
On dit que $\overrightarrow{AC}$ est la **somme** des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.



Bout à bout : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Méthode : construire $\vec{u} + \vec{v}$

- **Bout à bout (Chasles)** : on place un représentant de $\vec{v}$ à l'extrémité d'un représentant de $\vec{u}$; la somme va de l'origine du premier à l'extrémité du second.
- **Règle du parallélogramme** : on place $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec la même origine O ; $\vec{u} + \vec{v}$ est la diagonale issue de O du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Règle du parallélogramme

Propriété : règles de calcul

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$; $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$; $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$: la somme de deux vecteurs opposés est le vecteur nul.
Pour tous points A, B, C : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ si et seulement si B est le milieu de $[AC]$.

Remarque : différence de deux vecteurs

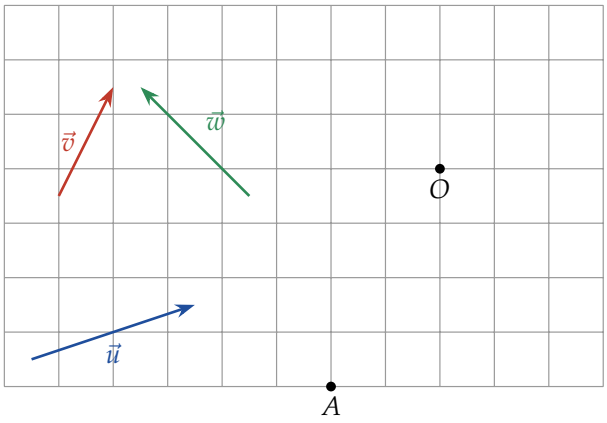
Soustraire $\vec{v}$, c'est ajouter son opposé : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. En particulier, pour tous points A, B, C : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.

Exercice 2 : relation de Chasles et constructions

a. Simplifier chaque somme en un seul vecteur :
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$ ..... $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}=$ .....
$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=$ ..... $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=$ .....
$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=$ ..... $\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{TR}+\overrightarrow{ST}=$ .....

b. Sur le quadrillage ci-contre, construire à partir du point A le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ (bout à bout), puis à partir du point O le vecteur $\vec{u}+\vec{w}$ (règle du parallélogramme).

c. I est le milieu de $[AB]$. Compléter :
$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=$ ..... et $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=$ .....



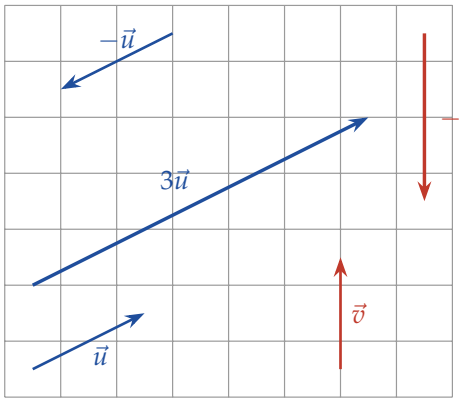
III. Produit d'un vecteur par un nombre réel

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel. Le vecteur $k\vec{u}$ est défini ainsi :

- si $k>0$, $k\vec{u}$ a la **même direction** et le **même sens** que $\vec{u}$, et sa norme est k fois celle de $\vec{u}$: $\|k\vec{u}\|=k\|\vec{u}\|$;
- si $k<0$, $k\vec{u}$ a la **même direction** que $\vec{u}$, le **sens contraire**, et sa norme est $-k$ fois celle de $\vec{u}$: $\|k\vec{u}\|=-k\|\vec{u}\|$;
- si $k=0$, $k\vec{u}=\vec{0}$.

En particulier $(-1)\vec{u}=-\vec{u}$ et $\vec{u}+\vec{u}=2\vec{u}$.



$3\vec{u}$: même sens que $\vec{u}$, trois fois plus long. $-\frac{3}{2}\vec{v}$: sens contraire de $\vec{v}$, une fois et demie plus long. $-\vec{u}$: l'opposé de $\vec{u}$.

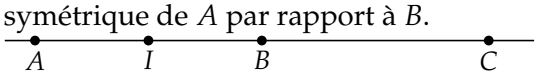
Propriété : règles de calcul

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et tous réels k, k' :
$k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$; $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$;
$k(k'\vec{u})=(kk')\vec{u}$.
Si $\vec{u}\neq\vec{0}$: $k\vec{u}=\vec{0}$ si et seulement si $k=0$.

Exercice 3 : multiplier un vecteur par un réel

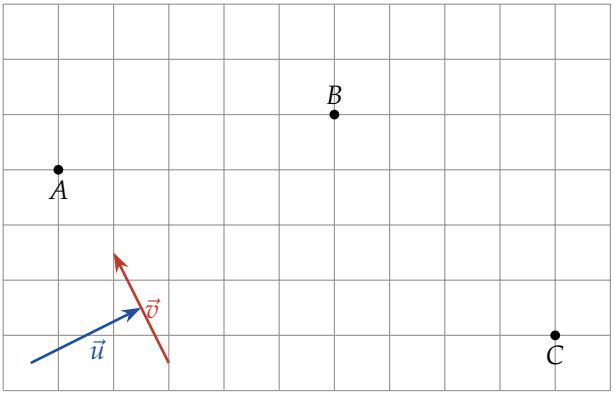
a. Sur le quadrillage ci-contre, construire, à partir des points indiqués, les vecteurs $\overrightarrow{AM}=2\vec{u}$, $\overrightarrow{BN}=-2\vec{v}$ et $\overrightarrow{CP}=\vec{u}+2\vec{v}$.

b. $[AB]$ est un segment, I son milieu et C le symétrique de A par rapport à B.



Compléter avec le nombre qui convient :
$\overrightarrow{AI}=\ldots\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}=\ldots\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{CA}=\ldots\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{IB}=\ldots\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{BI}=\ldots\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{IC}=\ldots\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AC}=\ldots\overrightarrow{AI}$ $\overrightarrow{BC}=\ldots\overrightarrow{IB}$ $\overrightarrow{CI}=\ldots\overrightarrow{AB}$

c. Simplifier :
$3\vec{u}-\vec{u}+2(\vec{u}-\vec{v})=$ .....
$2(\vec{u}+\vec{v})-3\vec{v}=$ .....



IV. Coordonnées d'un vecteur

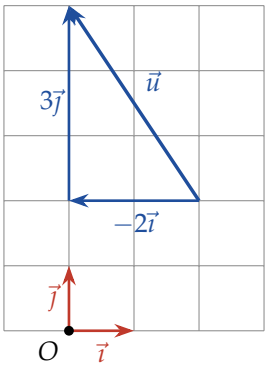
1. Base et repère

Définition

Soient O, I et J trois points non alignés. On pose $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$.
Le couple $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est une **base** du plan et $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est un **repère** du plan. Le repère est **orthonormé** lorsque $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ = 1$.

Définition : coordonnées d'un vecteur

Dans une base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de façon unique $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
Le couple $(x;y)$ est le couple de **coordonnées** de $\vec{u}$: x est son abscisse, y son ordonnée. On note $\vec{u}(x;y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



$\vec{u} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, donc $\vec{u}(-2;3)$.
On lit x en se déplaçant « horizontalement » et y « verticalement ».

2. Calculs avec les coordonnées

Propriété

Dans une base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère $\vec{u}(x;y)$, $\vec{v}(x';y')$ et un réel k. Alors :

$$\vec{u} = \vec{v} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}, \qquad \vec{u} + \vec{v}\,(x + x';y + y'), \qquad k\vec{u}\,(kx;ky).$$

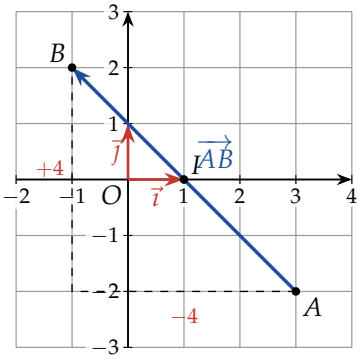
Exemple. Si $\vec{u}(2;5)$ et $\vec{v}(4;-1)$, alors :
$\vec{u} + \vec{v}\,(2+4;5+(-1))$, soit $\vec{u} + \vec{v}\,(6;4)$; $-3\vec{v}\,(-3\times 4;-3\times(-1))$, soit $-3\vec{v}\,(-12;3)$.

Propriété : coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Dans un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, dire que M a pour coordonnées $(x;y)$ signifie que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{OM}(x;y)$.
Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, alors

$$\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;\, y_B - y_A).$$

Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2};\dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.
Si le repère est **orthonormé** :
$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.



Exemple. $A(3;-2)$ et $B(-1;2)$: $\overrightarrow{AB}\,(-1-3;2-(-2))$, soit $\overrightarrow{AB}\,(-4;4)$; $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$; milieu $I\left(\dfrac{3-1}{2};\dfrac{-2+2}{2}\right) = I(1;0)$.

Méthode : démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées : pour montrer que $ABCD$ est un parallélogramme, on calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{DC}$ et on vérifie qu'elles sont égales.

Exercice 4 : lire et calculer des coordonnées

Le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ ci-contre est orthonormé.

a. Lire les coordonnées des vecteurs :
$\vec{u}(\ldots\,;\ldots)$ $\quad\vec{v}(\ldots\,;\ldots)$ $\quad\vec{w}(\ldots\,;\ldots)$

b. Calculer les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ et de $2\vec{u}-3\vec{v}$.

.....

.....

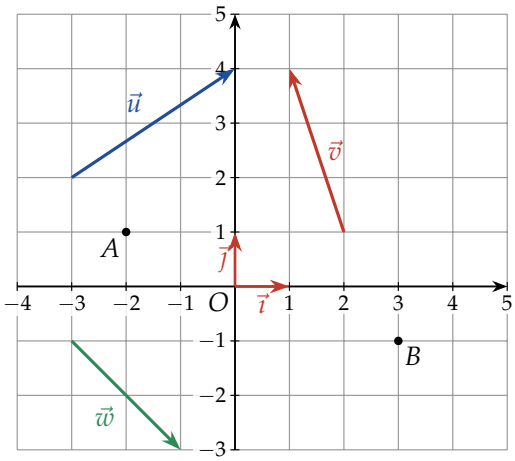
c. On donne $A(-2\,;1)$ et $B(3\,;-1)$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, la norme $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ et les coordonnées du milieu de $[AB]$.

.....

.....

.....

d. Placer le point C tel que $\overrightarrow{AC}=\vec{u}$ et donner ses coordonnées : $C(\ldots\,;\ldots)$



V. Colinéarité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** lorsqu'ils ont la **même direction**. Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

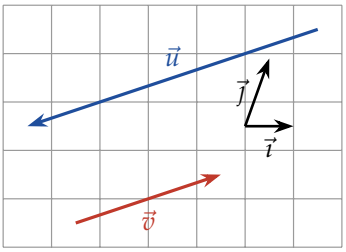
Propriété

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$ ou $\vec{v}=k\vec{u}$.

Propriété : critère de colinéarité

Soient $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$. Le nombre $xy'-x'y$ est appelé **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\det(\vec{u}\,;\vec{v})$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles, c'est-à-dire si et seulement si

$$\det(\vec{u}\,;\vec{v})=xy'-x'y=0.$$



$\vec{u}=-2\vec{v}$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (même direction, sens contraires) ; $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ ne le sont pas.

Exemple

$\vec{u}(6\,;-9)$ et $\vec{v}(-8\,;12)$:
$\det(\vec{u}\,;\vec{v})=6\times12-(-8)\times(-9)$
$=72-72=0$,
donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **sont colinéaires** (ici $\vec{v}=-\frac{4}{3}\vec{u}$).

$\vec{w}(2\,;-6)$ et $\vec{z}(-3\,;7)$:
$\det(\vec{w}\,;\vec{z})=2\times7-(-3)\times(-6)$
$=14-18=-4\neq0$,
donc $\vec{w}$ et $\vec{z}$ **ne sont pas colinéaires**.

Exercice 5 : vecteurs colinéaires ?

a. Les vecteurs $\vec{u}(4\,;-6)$ et $\vec{v}(-6\,;9)$ sont-ils colinéaires ? Si oui, exprimer $\vec{v}$ en fonction de $\vec{u}$.

.....

.....

b. Les vecteurs $\vec{u}(3\,;5)$ et $\vec{v}(5\,;3)$ sont-ils colinéaires ?

.....

c. Déterminer le réel m pour que les vecteurs $\vec{u}(2\,;m)$ et $\vec{v}(-3\,;6)$ soient colinéaires.

.....

.....

Propriété : applications de la colinéarité

- **Parallélisme** : les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- **Alignement** : les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple : parallélisme

On donne $A(4;2)$, $B\left(3;\frac{7}{2}\right)$, $C\left(1;\frac{5}{2}\right)$ et $D\left(1;\frac{1}{2}\right)$.
Démontrer que $ABCD$ est un trapèze.

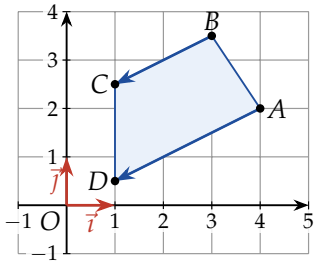
$\overrightarrow{AD}\left(1-4;\frac{1}{2}-2\right)$, soit $\overrightarrow{AD}\left(-3;-\frac{3}{2}\right)$.

$\overrightarrow{BC}\left(1-3;\frac{5}{2}-\frac{7}{2}\right)$, soit $\overrightarrow{BC}(-2;-1)$.

$\det(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{BC}) = -3\times(-1)-(-2)\times\left(-\frac{3}{2}\right)$,

soit $\det(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{BC}) = 3-3=0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, donc $(AD)\parallel(BC)$: $ABCD$ est un trapèze.



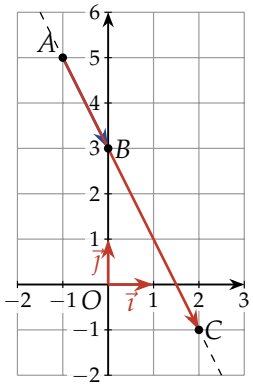
Exemple : alignement

On donne $A(-1;5)$, $B(0;3)$ et $C(2;-1)$.
Démontrer que A, B et C sont alignés.

$\overrightarrow{AB}(0-(-1);3-5)$, soit $\overrightarrow{AB}(1;-2)$.

$\overrightarrow{AC}(2-(-1);-1-5)$, soit $\overrightarrow{AC}(3;-6)$.

On remarque que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$.
On peut aussi calculer le déterminant :
$\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 1\times(-6)-3\times(-2) = 0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les points A, B et C sont alignés.



Exercice 6 : parallélisme et alignement

Dans le repère orthonormé ci-contre, on donne $A(-3;1)$, $B(1;3)$, $C(4;1)$ et $D(-2;-2)$.

a. Placer les points et tracer le quadrilatère $ABCD$.

b. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{DC}$. $ABCD$ est-il un parallélogramme ?

.....

.....

c. Montrer que $(AB)\parallel(DC)$. Quelle est la nature de $ABCD$?

.....

.....

d. Le point $E(7;6)$ est-il aligné avec A et B ? Justifier.

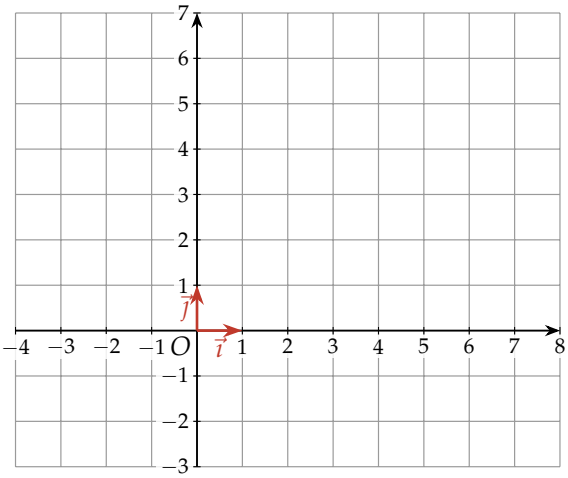
.....

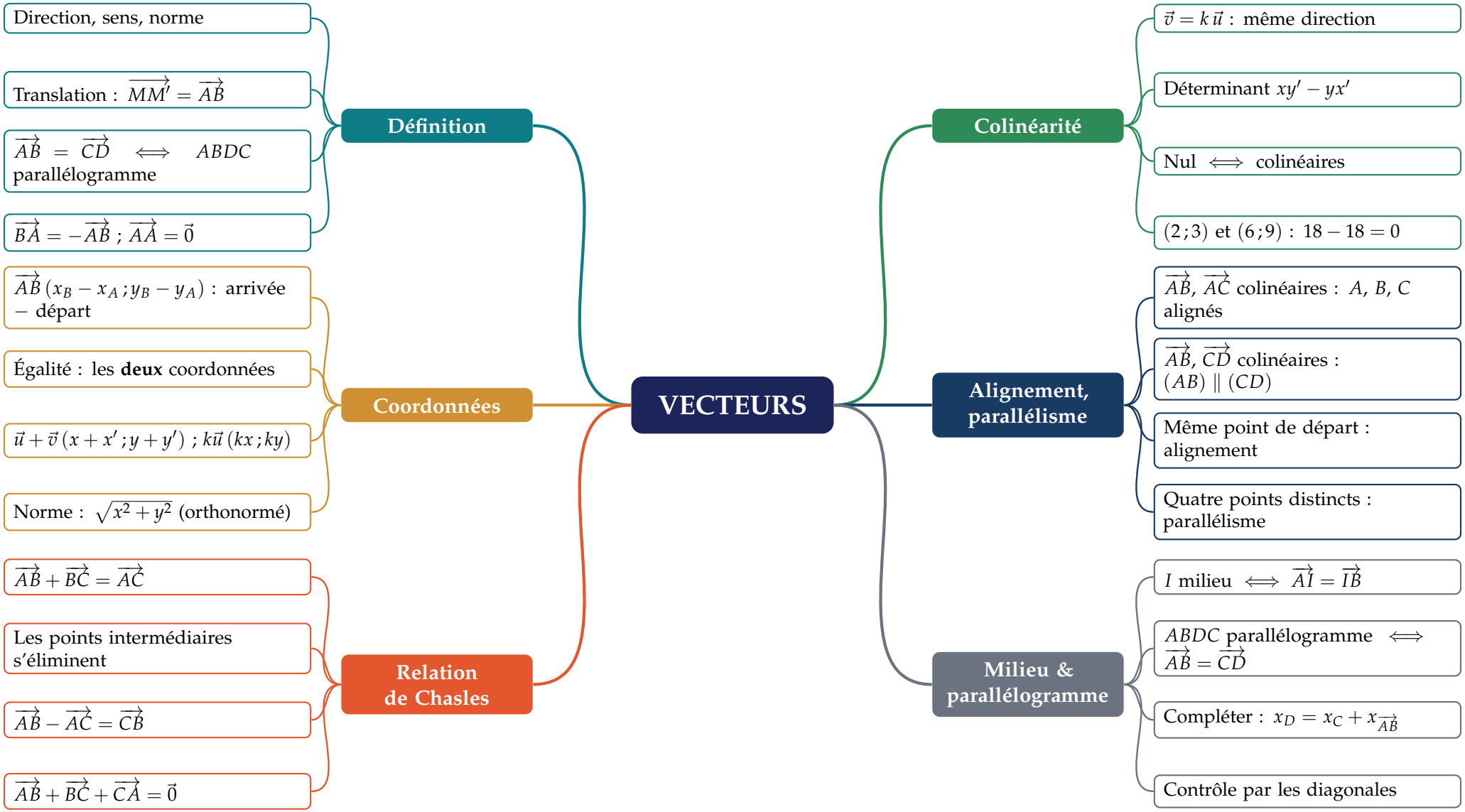
.....

e. Déterminer par le calcul les coordonnées du point F tel que $ABCF$ soit un parallélogramme.

.....

.....





Chapitre 6 · Chaque branche renvoie à une section du cours et à une fiche méthode.