Seconde

Vecteurs

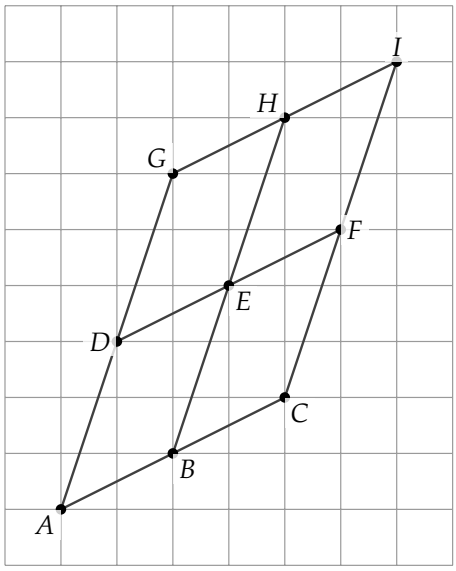
Fiche d'exercices

Sauf mention contraire, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. Sur les quadrillages, l'unité est le côté d'un carreau.

Série A ⋆ Automatismes

Exercice 1 : lire des vecteurs égaux sur une figure ⋆

La figure ci-contre est formée de parallélogrammes identiques ; les neuf points A, B, …, I sont leurs sommets.



a. Citer tous les vecteurs de la figure égaux à $\overrightarrow{AB}$ (d'origine et d'extrémité des points nommés).

b. Citer tous les représentants du vecteur $\overrightarrow{AD}$.

c. Compléter avec un point de la figure :
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A\ldots}$ $\quad$ $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{D\ldots}$
$\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{A\ldots}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{\ldots\ldots}$
$\overrightarrow{IG}=\ldots.\,\overrightarrow{AB}$

d. Quel est le milieu du segment $[AI]$? du segment $[CG]$?

e. Quelle est la nature du quadrilatère $ABED$? du quadrilatère $ACIG$? Justifier à l'aide de vecteurs.

Exercice 2 : direction, sens et norme ⋆

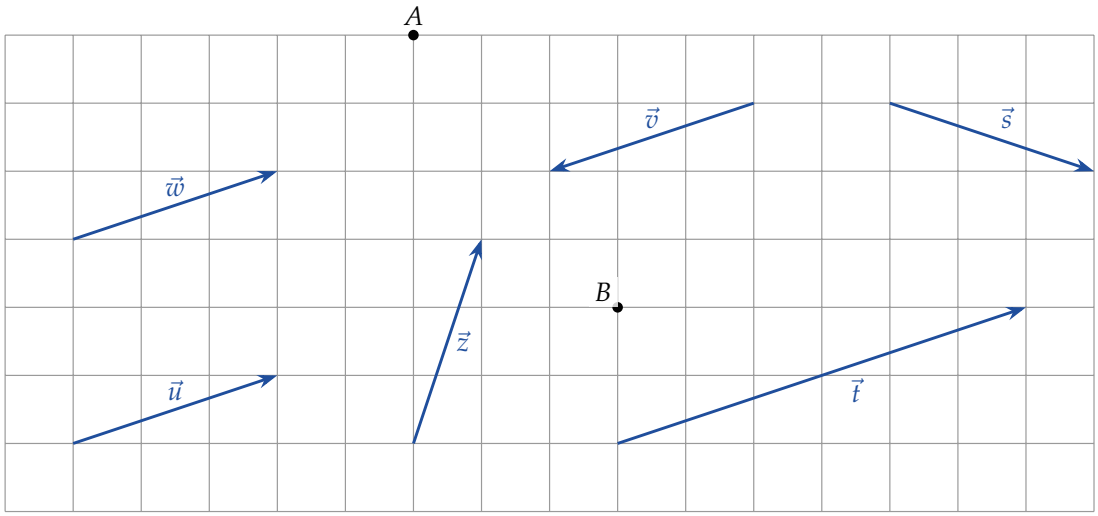
On a représenté ci-dessous six vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$, $\vec{t}$ et $\vec{s}$.

a. Quels vecteurs sont égaux à $\vec{u}$? Lequel est l'opposé de $\vec{u}$?

b. Quels vecteurs ont la même direction que $\vec{u}$? Parmi eux, lesquels ont aussi le même sens ?

c. Quels vecteurs ont la même norme que $\vec{u}$? Sont-ils tous égaux à $\vec{u}$?

d. Tracer, à partir du point A, un représentant du vecteur $-\vec{z}$ et, à partir du point B, un représentant du vecteur $\dfrac{1}{2}\vec{t}$.



Exercice 3 : relation de Chasles ⋆

Simplifier chaque expression pour l'écrire sous la forme d'un seul vecteur (les points A, B, C, D, M, N et O sont quelconques).

a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} =$ .....

b. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} =$ .....

c. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} =$ .....

d. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} =$ .....

e. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} =$ .....

f. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} =$ .....

g. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} =$ .....

h. $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{BA} =$ .....

Exercice 4 : construire des sommes de vecteurs ⋆

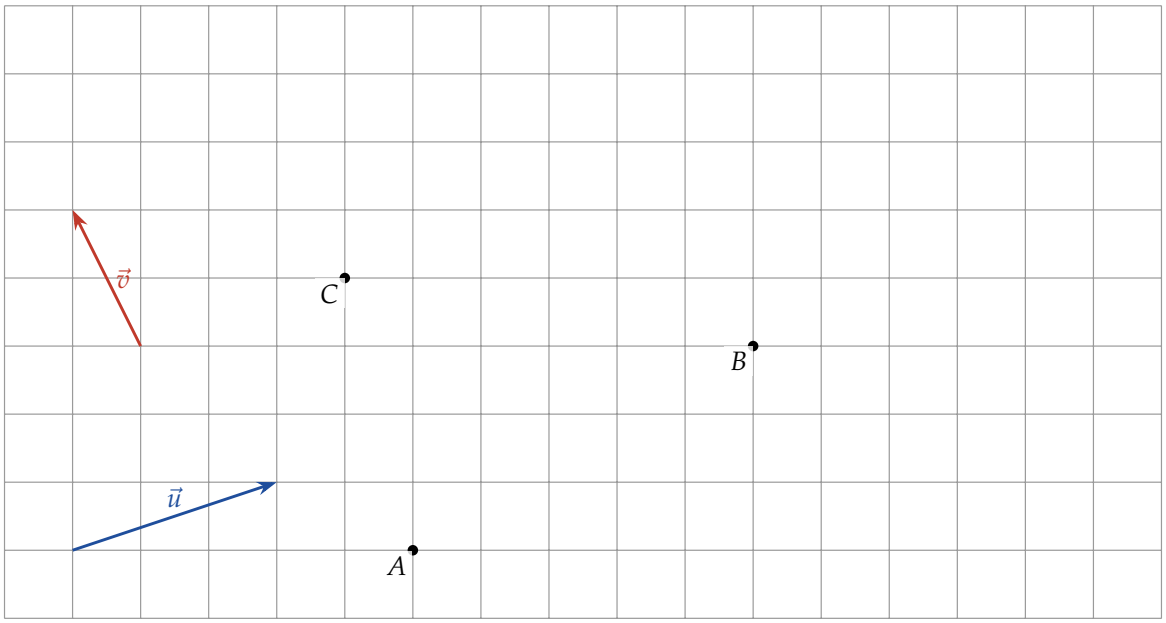
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont représentés sur le quadrillage ci-dessous.

a. Construire, à partir du point A, un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ (bout à bout).

b. Construire, à partir du point B, un représentant du vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ (on ajoute l'opposé de $\vec{v}$).

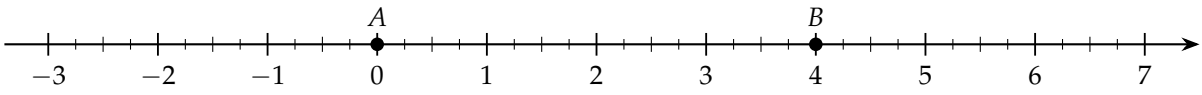
c. Construire, à partir du point C, un représentant du vecteur $2\vec{u} + \vec{v}$.

d. Pour chaque vecteur construit, indiquer le déplacement correspondant sur le quadrillage, sous la forme (nombre de carreaux horizontalement ; nombre de carreaux verticalement).



Exercice 5 : produit par un réel sur une droite graduée ⋆

Sur la droite graduée ci-dessous, on a placé les points A et B.



a. Placer les points C, D, E et F tels que :
$\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BE} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{BA}$.

b. Que remarque-t-on pour le point F ?

c. Compléter : $\overrightarrow{DC} =$ ..... $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{EC} =$ ..... $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BD} =$ ..... $\overrightarrow{AB}$.

d. Placer le point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Que représente G pour le segment $[AB]$?

e. Placer le point H tel que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$.

Exercice 6 : calculer avec les coordonnées ⋆

a. On donne $\vec{u}(2\,;-3)$ et $\vec{v}(-1\,;4)$. Calculer les coordonnées des vecteurs :
$\vec{u}+\vec{v}\,;\quad \vec{u}-\vec{v}\,;\quad 3\vec{u}\,;\quad -2\vec{v}\,;\quad 2\vec{u}+3\vec{v}\,;\quad \dfrac{1}{2}\vec{u}-\vec{v}.$

b. On donne $A(1\,;-2)$, $B(4\,;2)$ et $C(-3\,;5)$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis vérifier que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

c. Calculer la norme $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

d. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ tel que $2\vec{w}+\vec{u}=\vec{v}$.

Série B ⋆⋆ Entraînement

Exercice 7 : lire des coordonnées de vecteurs ⋆⋆

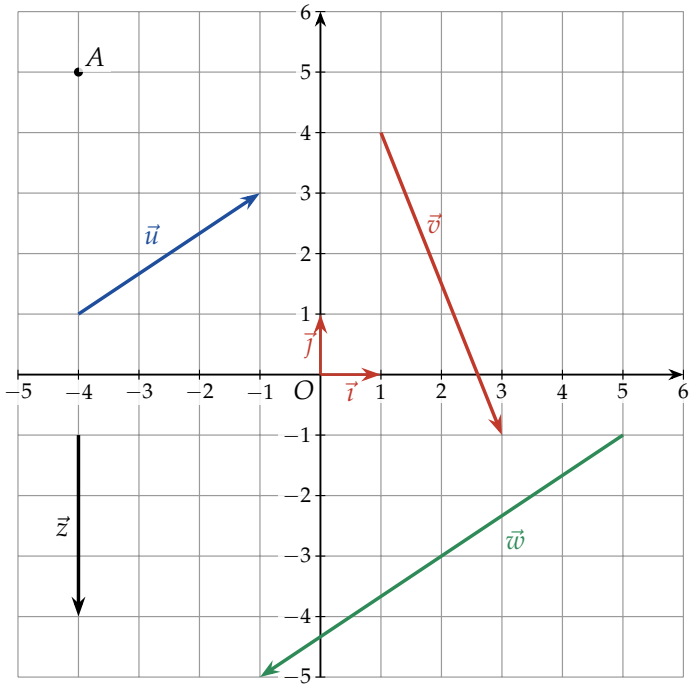
a. Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{z}$.

b. Calculer la norme de chacun de ces vecteurs.

c. Deux de ces vecteurs sont colinéaires : lesquels ? Exprimer l'un en fonction de l'autre.

d. Calculer les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ et de $2\vec{u}-\vec{z}$. Que vaut $\vec{w}+2\vec{u}$?

e. Placer le point M tel que $\overrightarrow{AM}=\vec{u}+\vec{v}$ et donner ses coordonnées.



Exercice 8 : construire un parallélogramme par le calcul ⋆⋆

On donne $A(-2\,;1)$, $B(1\,;3)$ et $C(3\,;-1)$.

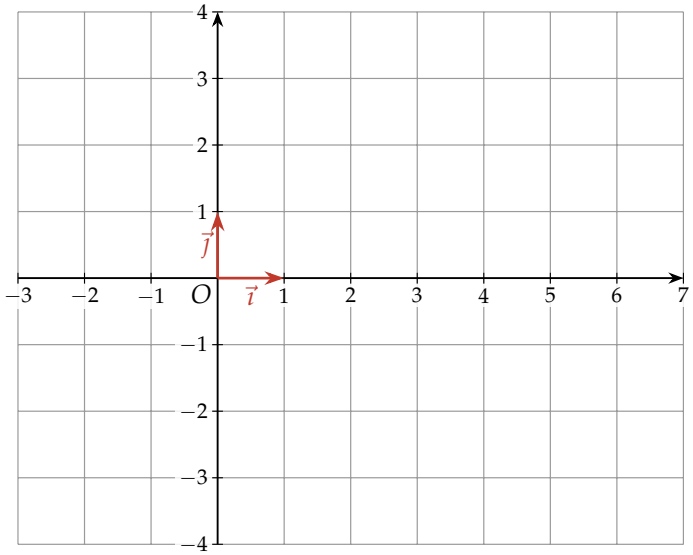
a. Placer les points A, B et C.

b. Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

c. Calculer les coordonnées du centre K de ce parallélogramme.

d. Calculer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABEC$?

e. Démontrer que C est le milieu du segment $[DE]$.



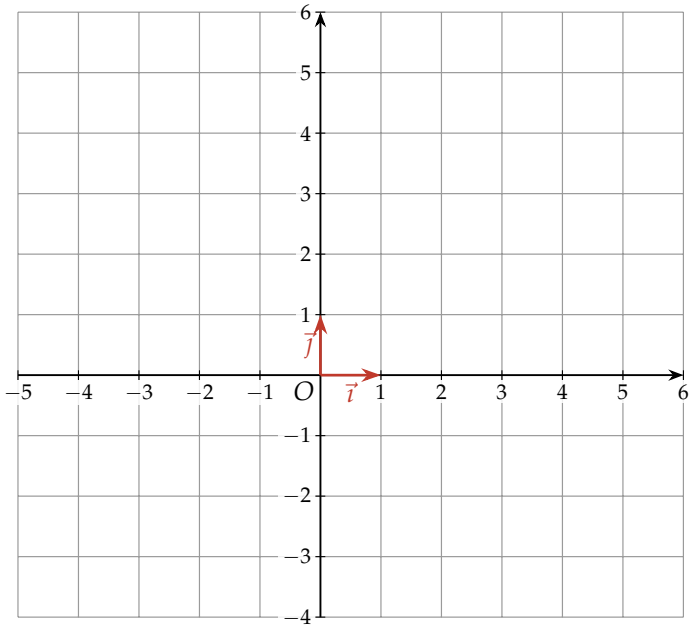
Exercice 9 : milieux et symétriques avec les vecteurs ⋆⋆

a. On donne $A(1;-2)$, $B(4;-1)$ et $C(-2;-3)$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BA}$ et de $\overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire pour le point A ?

b. On donne $R(-3;1)$ et $T(1;-1)$. Déterminer les coordonnées du point S tel que T soit le milieu de $[RS]$, en traduisant l'égalité $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{TS}$.

c. On donne $M(2;5)$ et $N(-4;1)$. Calculer les coordonnées du point P tel que $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$. Que représente P ?

d. Placer tous les points et contrôler les résultats sur la figure.



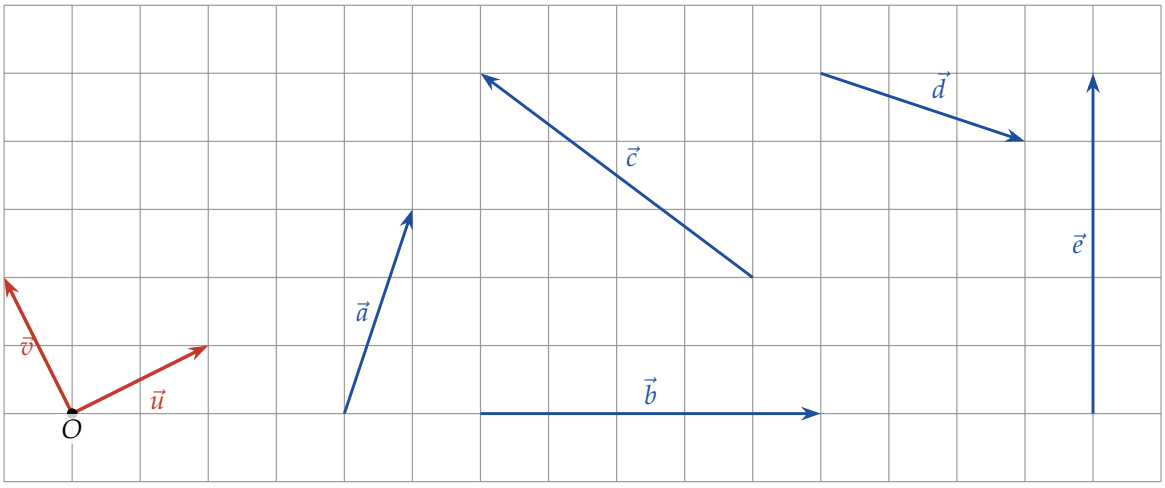
Exercice 10 : décomposer un vecteur dans une base ⋆⋆

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, non colinéaires, sont représentés à partir du point O : le couple $(\vec{u};\vec{v})$ est une base du plan.

a. Exprimer chacun des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ et $\vec{e}$ sous la forme $x\vec{u} + y\vec{v}$ (on pourra construire des parallélogrammes ou compter les carreaux).

b. En déduire les coordonnées de ces vecteurs dans la base $(\vec{u};\vec{v})$.

c. Construire à partir de O le vecteur $\vec{f} = 3\vec{u} - \vec{v}$.



Exercice 11 : vecteurs colinéaires ⋆⋆

a. Dans chaque cas, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Si oui, exprimer $\vec{v}$ en fonction de $\vec{u}$.

(1) $\vec{u}(3;-2)$ et $\vec{v}(-6;4)$

(2) $\vec{u}\left(\sqrt{2};1\right)$ et $\vec{v}\left(2;\sqrt{2}\right)$

(3) $\vec{u}(5;3)$ et $\vec{v}(4;2)$

(4) $\vec{u}\left(\frac{2}{3};-1\right)$ et $\vec{v}(-4;6)$

b. Déterminer le réel m pour que les vecteurs $\vec{u}(m;4)$ et $\vec{v}(3;6)$ soient colinéaires.

c. Déterminer les réels m pour lesquels les vecteurs $\vec{u}(m;2)$ et $\vec{v}(8;m)$ sont colinéaires.

Exercice 12 : avec Python ⋆⋆

On a écrit les fonctions Python ci-contre.

a. Que renvoie l'appel `coord(1, -2, 4, 2)` ? À quoi correspond ce résultat ?

b. Que renvoie `det((6, -9), (-8, 12))` ? Interpréter.

c. Compléter la fonction `alignes` pour qu'elle renvoie `True` si les points A, B, C sont alignés et `False` sinon.

d. Que renvoie l'appel `alignes(-1, 5, 0, 3, 2, -1)` ?

e. Écrire une fonction `parallelogramme` qui prend les coordonnées de quatre points A, B, C, D et renvoie `True` si $ABCD$ est un parallélogramme. La tester avec l'exercice 8.

Python

```
def coord(xA, yA, xB, yB):
    return (xB - xA, yB - yA)

def det(u, v):
    return u[0] * v[1] - u[1] * v[0]

def alignes(xA, yA, xB, yB, xC, yC):
    u = coord(xA, yA, xB, yB)
    v = ...
    return ...
```

Série C ⋆⋆⋆ Applications

Exercice 13 : des points alignés ? ⋆⋆⋆

On donne $A(-2;-1)$, $B(1;1)$, $C(7;5)$ et $D(4;2)$.

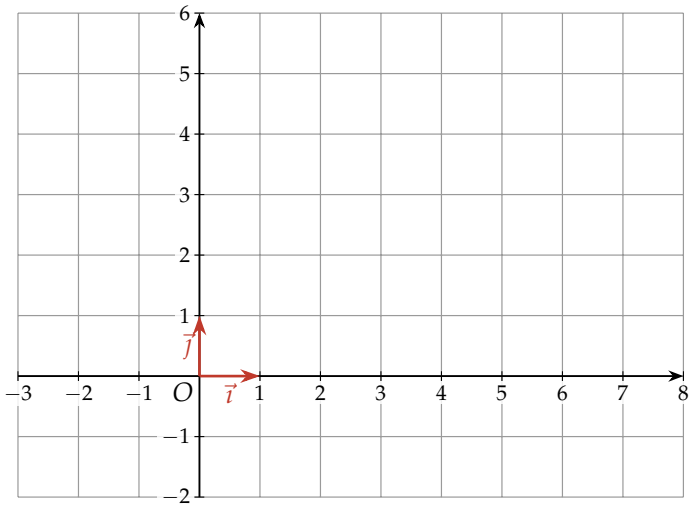
a. Placer les quatre points.

b. Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier.

c. Les points A, B et D sont-ils alignés ?

d. Déterminer l'abscisse du point E d'ordonnée 3 tel que A, B et E soient alignés.

e. Déterminer les coordonnées du point F d'intersection de la droite (AB) avec l'axe des ordonnées.



Exercice 14 : un trapèze ⋆⋆⋆

On donne $A(-3;-2)$, $B(3;0)$, $C(2;2)$ et $D(-1;1)$.

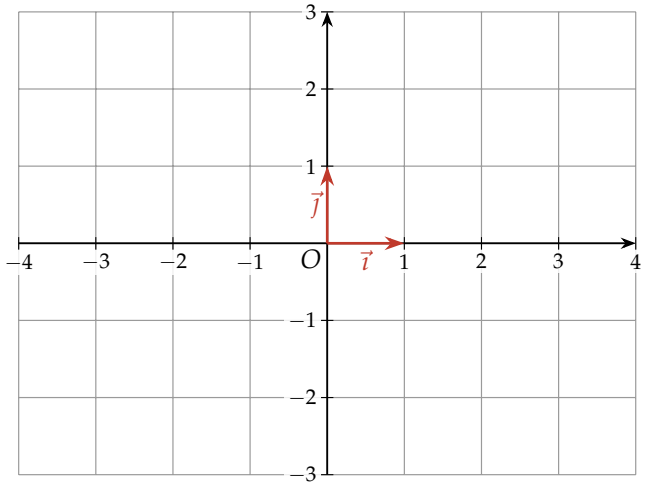
a. Placer les points et tracer le quadrilatère $ABCD$.

b. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{DC}$. Exprimer $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{DC}$.

c. En déduire que $(AB) \parallel (DC)$. $ABCD$ est-il un parallélogramme ? Quelle est sa nature ?

d. Soit I le milieu de $[AB]$. Démontrer que $IBCD$ est un parallélogramme.

e. Démontrer que $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AD}$.



Exercice 15 : points définis par une égalité vectorielle ⋆⋆⋆

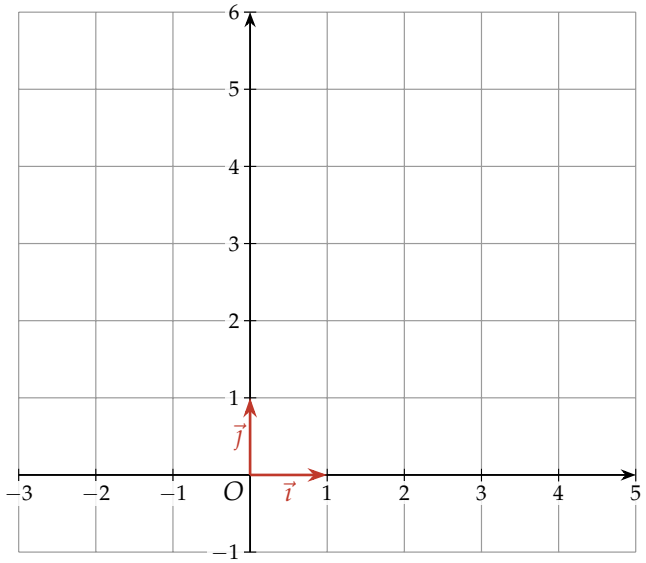
On donne $A(-2\,;1)$ et $B(4\,;4)$.

a. Calculer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, puis vérifier que $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

b. On cherche le point $N(x\,;y)$ tel que $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} = \vec{0}$. Exprimer les coordonnées de $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}$ en fonction de x et y, puis en déduire N.

c. Démontrer que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

d. Placer A, B, M et N. Que remarque-t-on ?



Exercice 16 : chercher des points particuliers ⋆⋆⋆

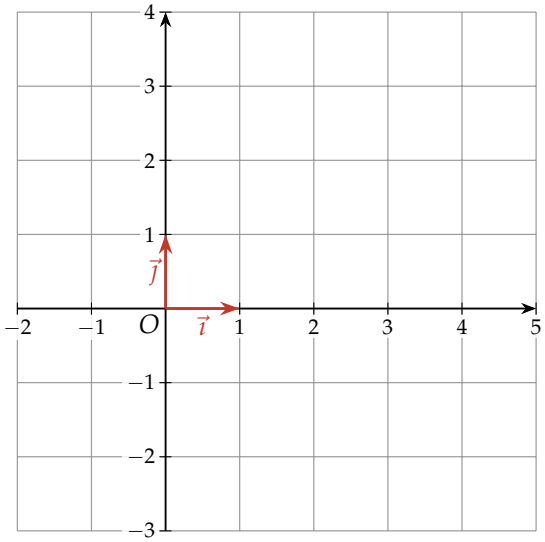
On donne $A(1\,;2)$, $B(4\,;3)$ et $C(3\,;-1)$.

a. Placer les points A, B et C.

b. Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

c. Déterminer le point E de l'axe des abscisses tel que les droites (AE) et (BC) soient parallèles.

d. Déterminer le point F de l'axe des ordonnées tel que les points A, B et F soient alignés.



Exercice 17 : nature d'un quadrilatère ⋆⋆⋆

On donne $A(-1\,;-2)$, $B(3\,;-1)$, $C(4\,;3)$ et $D(0\,;2)$.

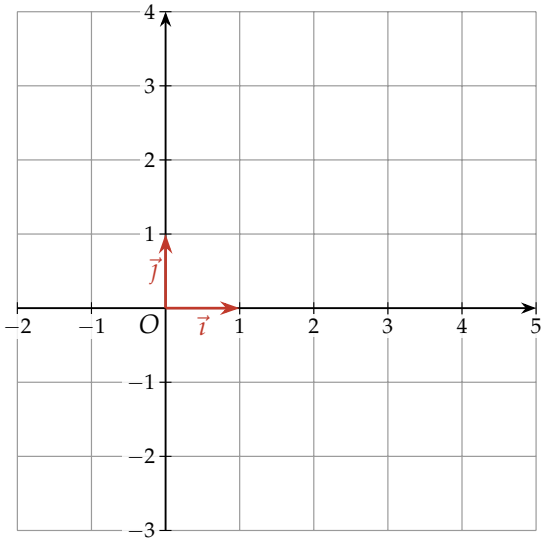
a. Placer les points et tracer le quadrilatère $ABCD$.

b. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

c. Calculer $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|$. Que peut-on en déduire pour $ABCD$?

d. Calculer les longueurs des diagonales AC et BD. $ABCD$ est-il un carré ?

e. Calculer l'aire de $ABCD$ (unité d'aire : le carreau).



Série D ⋆⋆⋆⋆ Approfondissement

Exercice 18 : trois points alignés dans un triangle ⋆⋆⋆⋆

ABC est le triangle tracé ci-contre. On note I le milieu de $[AB]$, J le point tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et K le symétrique de B par rapport à C.

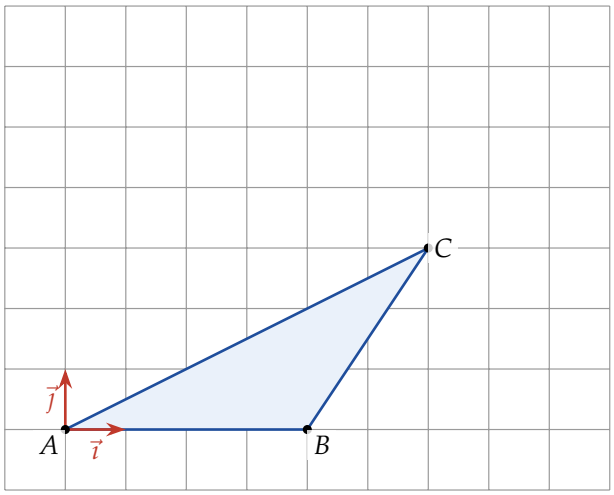
a. Placer les points I, J et K.

b. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. Justifier que $\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BC}$, puis exprimer $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

d. Démontrer que $\overrightarrow{IK} = 3\overrightarrow{IJ}$. Conclure.

e. Retrouver ce résultat avec les coordonnées dans le repère $(A\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ du quadrillage.



Exercice 19 : parallélogramme et tiers d'une diagonale ⋆⋆⋆⋆

$ABCD$ est le parallélogramme tracé ci-contre. On note I le milieu de $[AB]$ et E le point tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

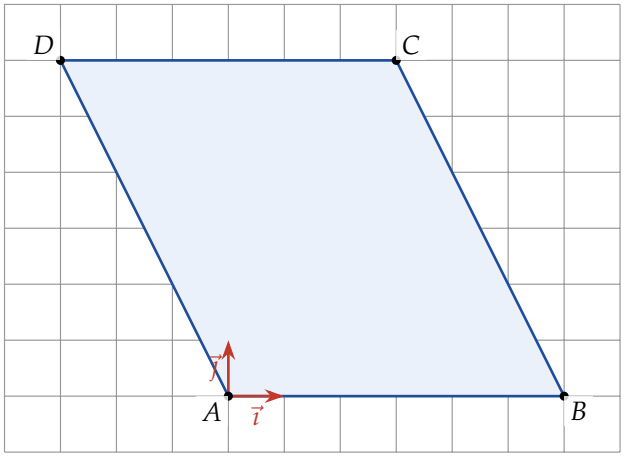
a. Placer les points I et E.

b. Exprimer $\overrightarrow{DI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

c. Exprimer $\overrightarrow{AC}$, puis $\overrightarrow{AE}$, puis $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

d. Démontrer que $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$. Que peut-on en déduire pour les points D, E et I ?

e. Vérifier ce résultat avec les coordonnées dans le repère $(A\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ du quadrillage.



Exercice 20 : centre de gravité d'un triangle ⋆⋆⋆⋆

On donne $A(-2\,;-1)$, $B(4\,;1)$ et $C(1\,;5)$.

a. Placer les points et tracer le triangle ABC.

b. Calculer les coordonnées du milieu I de $[BC]$, puis celles du point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

c. Démontrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

d. Soit J le milieu de $[AC]$. Démontrer que les points B, G et J sont alignés.

e. Soit K le milieu de $[AB]$. Les points C, G et K sont-ils alignés ?

f. Que représente le point G pour le triangle ABC ? Vérifier que ses coordonnées sont les moyennes de celles de A, B et C.

