Chapitre 7. Cours

Fonctions affines et tableaux de signes

1. Fonction affine

Les fonctions affines sont les plus simples de toutes : leur courbe est une droite. Elles servent de modèle de base, et surtout d'outil : savoir lire le signe de $ax + b$ ouvre la résolution de toutes les inéquations produit ou quotient.

Définition 1.1 — Fonction affine

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est **affine** lorsqu'il existe deux réels m et p tels que, pour tout x :

$$f(x) = mx + p.$$

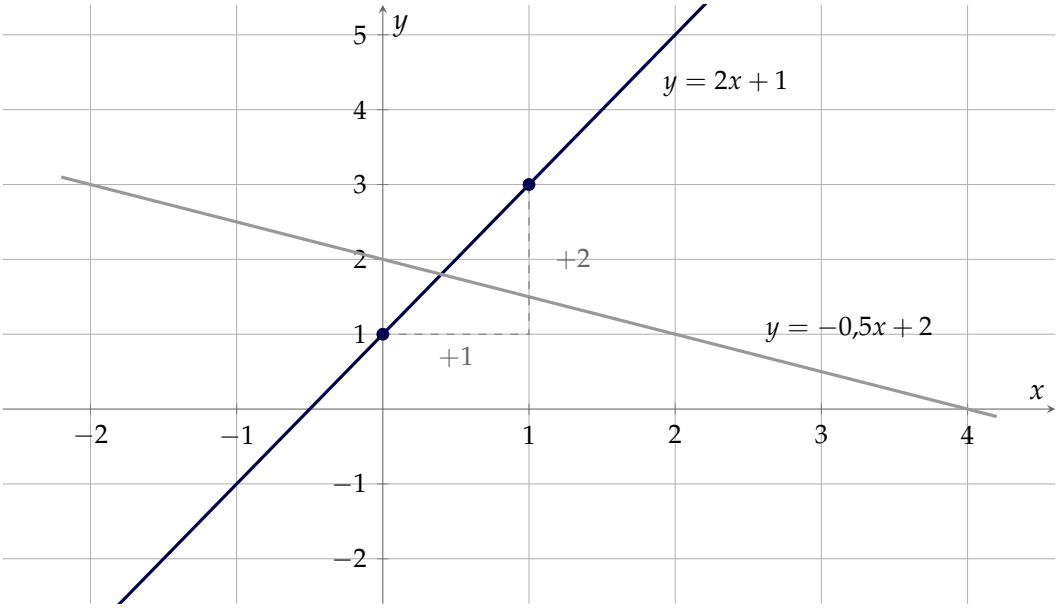
Le réel m est le **coefficient directeur**, le réel p l'**ordonnée à l'origine**.

Propriété 1.2 — Deux cas particuliers

- Si $p = 0$, $f(x) = mx$ est une fonction **linéaire** : elle traduit une situation de proportionnalité, et sa droite passe par l'origine.
- Si $m = 0$, $f(x) = p$ est une fonction **constante** : sa droite est horizontale.

Propriété 1.3 — Représentation graphique

La courbe d'une fonction affine est la **droite** d'équation $y = mx + p$:
- elle coupe l'axe des ordonnées au point $(0\,;p)$;
- quand x augmente de 1, y varie de m.



Deux droites : l'une monte de 2 *quand* x *avance de* 1*, l'autre descend de* 0,5*. Les ordonnées à l'origine sont* 1 *et* 2*.*

Théorème 1.4 — Sens de variation

Soit $f(x) = mx + p$.
- Si $m > 0$, f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $m < 0$, f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $m = 0$, f est **constante**.

Démonstration

Soient $a < b$. Alors $f(b) - f(a) = (mb + p) - (ma + p) = m(b - a)$. Comme $b - a > 0$, cette différence a le signe de m : positive si $m > 0$, négative si $m < 0$, nulle si $m = 0$. ■

2. Déterminer une fonction affine

Théorème 2.1 — Coefficient directeur par deux points

Si f est affine et si $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ sont deux points de sa droite avec $x_A \neq x_B$:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}.$$

Méthode 2.2 — Trouver f à partir de deux points

1. Calculer m par le quotient des différences — « variation de y sur variation de x ».
2. Écrire $f(x) = mx + p$ avec le m trouvé.
3. Déterminer p en substituant les coordonnées de *l'un* des deux points.
4. **Vérifier** avec le second point : c'est le contrôle qui ne coûte rien.

Exemple 2.3

La droite passe par $A(1\,;3)$ et $B(4\,;9)$.
$m = \dfrac{9-3}{4-1} = \dfrac{6}{3} = 2$, donc $f(x) = 2x + p$. Avec A : $3 = 2 \times 1 + p$, soit $p = 1$.
Ainsi $f(x) = 2x + 1$. Contrôle avec B : $f(4) = 8 + 1 = 9$ ✓.

Attention — Le sens du quotient

Le numérateur porte sur les **ordonnées**, le dénominateur sur les **abscisses** : $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Inverser les deux est l'erreur classique ; l'ordre des points est libre, s'il est le même en haut et en bas.

3. Signe d'une fonction affine

Théorème 3.1 — Signe de $mx + p$

Soit $m \neq 0$. L'expression $mx + p$ s'annule pour $x = -\dfrac{p}{m}$, et :
- si $m > 0$, elle est **négative avant** la racine, **positive après** ;
- si $m < 0$, elle est **positive avant** la racine, **négative après**.

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$mx+p$ $(m>0)$		$-$	0	$+$	
$mx+p$ $(m<0)$		$+$	0	$-$	

Le signe change une seule fois, en la racine : « signe de m après la racine ».

Exemple 3.2

Signe de $3x-6$: la racine est $x=2$, et $m=3>0$. Donc $3x-6<0$ sur $]-\infty\,;2[$, s'annule en 2, et $3x-6>0$ sur $]2\,;+\infty[$.
Signe de $-2x+8$: racine $x=4$, $m=-2<0$: positif avant 4, négatif après.

Remarque — La phrase à retenir

« **Signe de m après la racine** » : quatre mots qui résument tout le théorème. Avant la racine, c'est le signe contraire.

4. Tableau de signes d'un produit

Méthode 4.1 — Signe d'un produit de facteurs affines

1. Déterminer la **racine** de chaque facteur.
2. Ranger ces racines par ordre croissant sur la première ligne du tableau.
3. Remplir une ligne par facteur, en appliquant la règle « signe de m après la racine ».
4. Multiplier les signes colonne par colonne pour obtenir la dernière ligne — celle du produit.
5. Lire le signe du produit sur cette dernière ligne, intervalle par intervalle.

Exemple 4.2 — Le tableau modèle

Étudions le signe de $A(x)=(x-1)(-2x+6)$. Les racines sont 1 (facteur croissant) et 3 (facteur décroissant).

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On lit directement : $A(x)\geqslant 0$ pour $x\in[1\,;3]$, et $A(x)<0$ sur $]-\infty\,;1[\cup]3\,;+\infty[$.

Attention — Les zéros s'alignent

Chaque zéro de la dernière ligne se place **sous** le zéro du facteur qui l'a produit. Un produit est nul dès qu'un seul facteur l'est : c'est ce qui donne les bornes de l'intervalle solution.

5. Inéquations produit et quotient

Méthode 5.1 — Résoudre une inéquation

1. **Tout ramener d'un côté**, pour comparer à 0 — jamais de division par une expression contenant x.
2. **Factoriser** l'expression obtenue.
3. Dresser le **tableau de signes**.
4. Lire l'ensemble des solutions, en soignant les crochets.

Exemple 5.2

Résolvons $(x+2)(3-x) \leqslant 0$. Racines : -2 (facteur croissant) et 3 (facteur décroissant).
Le produit est négatif à l'extérieur des racines :

$$\mathcal{S} =]-\infty\,;-2] \cup [3\,;+\infty[.$$

Les bornes sont incluses car l'inégalité est large et le produit s'y annule.

Propriété 5.3 — Cas du quotient

Pour un quotient $\dfrac{A(x)}{B(x)}$, le tableau se dresse de la même façon, avec deux différences :

- les racines du **dénominateur** sont des **valeurs interdites** : on y porte une double barre, jamais un zéro ;
- ces valeurs sont **toujours exclues** de l'ensemble des solutions, quelle que soit l'inégalité.

Exemple 5.4

Résolvons $\dfrac{x-1}{x+2} \geqslant 0$. La valeur interdite est -2 ; la racine du numérateur est 1.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-1}{x+2}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Le quotient est positif à l'extérieur de $]-2\,;1[$:

$$\mathcal{S} =]-\infty\,;-2[\cup [1\,;+\infty[.$$

Noter les crochets : -2 est *exclu* (interdit), 1 est *inclus* (le quotient y est nul).

Attention — L'erreur la plus coûteuse

Ne jamais « multiplier en croix » dans une inéquation : $\dfrac{x-1}{x+2} \geqslant 0$ ne donne pas $x-1 \geqslant 0$. Le signe de $x+2$ est inconnu, et multiplier par un nombre négatif renverserait l'inégalité. Le tableau de signes évite ce piège.

6. Avec Python : signe et tableau

```
def signe_affine(m, p, x):
   v = m * x + p
   if v > 0:
      return "+"
   if v < 0:
      return "-"
   return "0"
def produit(x):
   return (x - 1) * (-2 * x + 6)
print("racine de x - 1 :", 1, " racine de -2x + 6 :", 6 / 2)
for x in [-1, 0, 1, 2, 3, 4]:
   print("x =", x, " x-1 :", signe_affine(1, -1, x),
            " -2x+6 :", signe_affine(-2, 6, x),
            " produit :", produit(x))
```

Trace d'exécution.

```
racine de x - 1 :  1 racine de -2x + 6 :  3.0
x = -1 x-1 :  - -2x+6 :  + produit :  -16
x = 0 x-1 :  - -2x+6 :  + produit :  -6
x = 1 x-1 :  0 -2x+6 :  + produit :  0
x = 2 x-1 :  + -2x+6 :  + produit :  2
x = 3 x-1 :  + -2x+6 :  0 produit :  0
x = 4 x-1 :  + -2x+6 :  - produit :  -6
```

Interprétation. Les trois colonnes de signes reproduisent exactement les trois lignes du tableau de l'exemple 4.2 : négatif avant 1, positif entre 1 et 3, négatif après 3 — avec des zéros aux deux racines. Le programme *illustre* le tableau ; il ne le remplace pas, car il ne teste que quelques valeurs alors que le tableau conclut sur **tous** les réels.

Un second programme : retrouver f à partir de deux points. La fonction `affine` applique la méthode 2.2 : elle calcule m par le quotient des différences, puis p en substituant les coordonnées de A.

```
def affine(xA, yA, xB, yB):
   m = (yB - yA) / (xB - xA)
   p = yA - m * xA
   return m, p
m, p = affine(1, 3, 4, 9)
print("m =", m, " p =", p)
print("controle f(4) =", m * 4 + p)
print("racine :", -p / m)
```

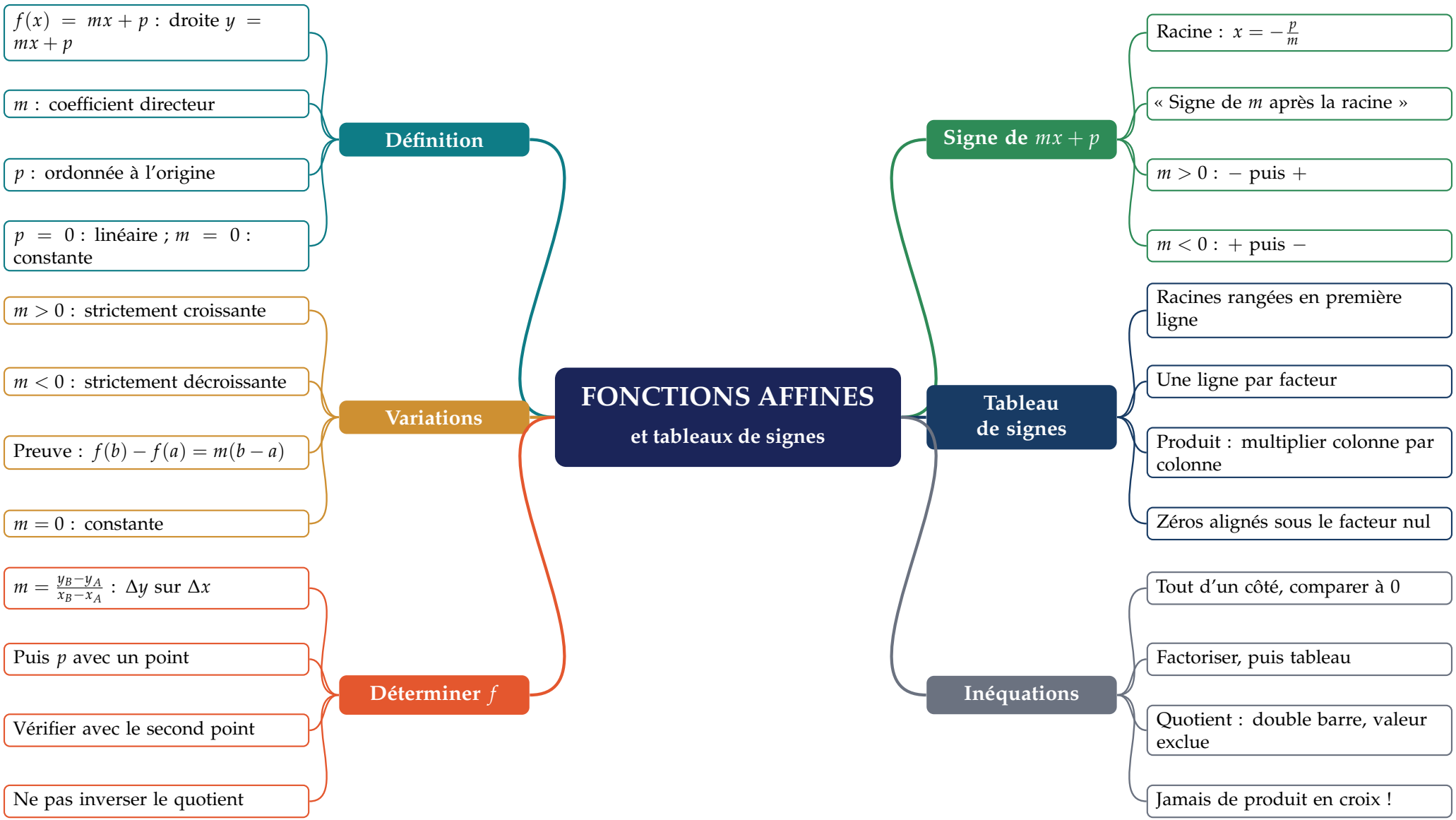
Trace d'exécution.

```
m = 2.0 p = 1.0
controle f(4) = 9.0
racine :  -0.5
```

Interprétation. On retrouve la fonction $f(x) = 2x + 1$ de l'exemple 2.3, et le contrôle avec le point B redonne bien 9. La racine $-0{,}5$ est la valeur où f change de signe : comme $m = 2 > 0$, f est négative avant $-0{,}5$ et positive après.

Remarque — Les trois réflexes du chapitre

1. Une fonction affine varie comme son coefficient m ; son signe change une fois, en $-\dfrac{p}{m}$. 2. « Signe de m après la racine ». 3. Pour une inéquation : tout d'un côté, factoriser, tableau — et double barre pour les valeurs interdites.



Chapitre 7 · Chaque branche renvoie à une section du cours et à une fiche méthode.