Chapitre 8. Cours

Fonctions de référence

1. La fonction carré

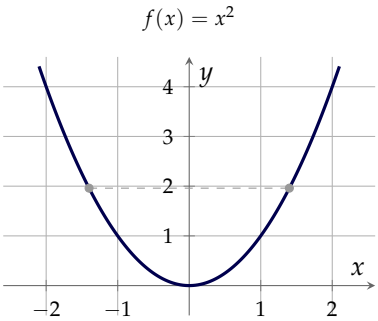
Quatre fonctions reviennent sans cesse : carré, inverse, racine carrée et cube. Les connaître par cœur — ensemble de définition, variations, courbe — évite de tout recalculer, et permet de comparer des nombres sans machine.

Définition 1.1 — Fonction carré

La fonction **carré** est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Sa courbe s'appelle une **parabole**, de sommet l'origine.

Propriété 1.2 — Variations et parité

La fonction carré est **strictement décroissante** sur $]-\infty\,;0]$ et **strictement croissante** sur $[0\,;+\infty[$. Elle est **paire** : $(-x)^2 = x^2$, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Enfin $x^2 \geqslant 0$ pour tout réel x.



x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		↘	0	↗	

Attention — L'ordre n'est pas toujours conservé

Sur les positifs, $a < b$ donne $a^2 < b^2$; mais sur les négatifs, l'ordre est **renversé** : $-3 < -2$ alors que $9 > 4$. On ne peut donc pas « élever au carré » une inégalité sans connaître le signe des nombres.

2. La fonction inverse

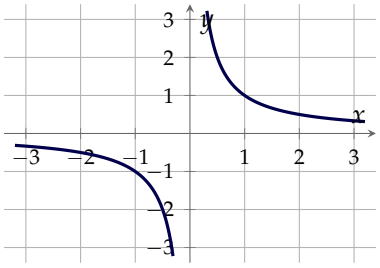
Définition 2.1 — Fonction inverse

La fonction **inverse** est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Sa courbe s'appelle une **hyperbole**.

Propriété 2.2 — Variations et parité

La fonction inverse est **strictement décroissante sur** $]-\infty\,;0[$ **et sur** $]0\,;+\infty[$ — jamais « sur $\mathbb{R}^*$ ». Elle est **impaire** : $\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine. Enfin $\dfrac{1}{x}$ a toujours le signe de x.

$f(x) = \frac{1}{x}$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖	↘

La double barre marque la valeur interdite 0 : la fonction décroît sur chaque branche, séparément.

Attention — Deux intervalles, pas un

Écrire « décroissante sur $\mathbb{R}^*$ » est faux : $-1 < 1$ et pourtant $\dfrac{1}{-1} = -1 < 1 = \dfrac{1}{1}$. La décroissance vaut **sur chaque intervalle**, jamais en traversant 0.

3. La fonction racine carrée

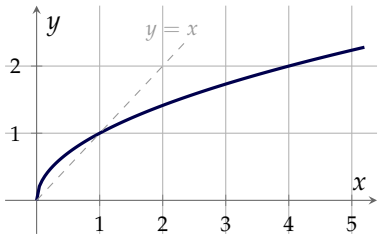
Définition 3.1 — Fonction racine carrée

La fonction **racine carrée** est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$: c'est l'unique nombre positif dont le carré vaut x.

Propriété 3.2 — Variations

La fonction racine carrée est **strictement croissante** sur $[0\,;+\infty[$, et $\sqrt{x} \geqslant 0$. Elle n'est ni paire ni impaire, son ensemble de définition n'étant pas symétrique.

$f(x) = \sqrt{x}$



x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	

Remarque — Une comparaison qui surprend

Sur $]0\,;1[$, la courbe de $\sqrt{x}$ est **au-dessus** de la droite $y = x$: par exemple $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5 > 0{,}25$. Au-delà de 1, elle passe en dessous : $\sqrt{4} = 2 < 4$. Prendre la racine d'un nombre entre 0 et 1 l'*augmente* — un résultat contre-intuitif à retenir.

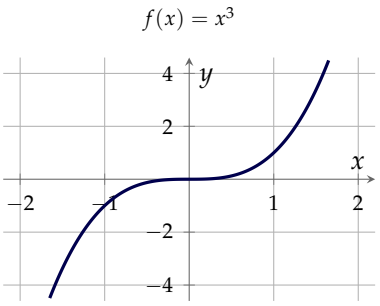
4. La fonction cube

Définition 4.1 — Fonction cube

La fonction **cube** est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

Propriété 4.2 — Variations et parité

La fonction cube est **strictement croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier** — c'est la seule des quatre dans ce cas. Elle est **impaire** : $(-x)^3 = -x^3$, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine, et x^3 a toujours le signe de x.



x	$-\infty$	$+\infty$
x^3		↗

5. Le tableau récapitulatif

Propriété 5.1 — Les quatre fonctions de référence

Fonction	Définie sur	Variations	Parité
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	décroissante puis croissante (minimum 0 en 0)	paire
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	décroissante sur chaque intervalle	impaire
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0\,;+\infty[$	croissante	aucune
$x \mapsto x^3$	$\mathbb{R}$	croissante sur $\mathbb{R}$	impaire

6. Comparer sans calculer

Méthode 6.1 — Comparer deux images

1. Identifier la fonction de référence en jeu et l'**intervalle** où se trouvent les deux nombres.
2. Sur cet intervalle, dire si la fonction est croissante (ordre conservé) ou décroissante (ordre renversé).
3. Conclure, en citant le sens de variation comme justification.

Exemple 6.2

• Comparer $2{,}5^2$ et 3^2 : les deux nombres sont positifs, la fonction carré y est croissante, et $2{,}5 < 3$, donc $2{,}5^2 < 3^2$.
• Comparer $(-5)^2$ et $(-4)^2$: les deux sont négatifs, la fonction carré y est *décroissante*, et $-5 < -4$, donc $(-5)^2 > (-4)^2$ — en effet $25 > 16$.
• Comparer $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{7}$: les deux nombres 3 et 7 sont positifs, la fonction inverse y est décroissante, et $3 < 7$, donc $\dfrac{1}{3} > \dfrac{1}{7}$.
• Comparer $\sqrt{10}$ et $\sqrt{11}$: la racine est croissante et $10 < 11$, donc $\sqrt{10} < \sqrt{11}$.

Méthode 6.3 — Encadrer une image

Si $2 \leqslant x \leqslant 5$, on encadre x^2 en appliquant la croissance sur $[0\,;+\infty[$:

$$2^2 \leqslant x^2 \leqslant 5^2, \quad \text{soit} \quad 4 \leqslant x^2 \leqslant 25.$$

Attention : si l'intervalle contient 0, il faut le **découper**. Pour $-3 \leqslant x \leqslant 2$, le carré vaut au minimum 0 (atteint en 0) et au maximum 9 (atteint en -3) : $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$.

7. Avec Python : tracer et comparer

```
from math import sqrt
print("x, x**2, 1/x, sqrt(x), x**3")
for x in [0.25, 0.5, 1, 2, 4]:
  print(x, x ** 2, 1 / x, sqrt(x), x ** 3)
print()
print("carre sur les negatifs :", (-5) ** 2, (-4) ** 2)
print("racine et identite :", sqrt(0.25) > 0.25, sqrt(4) > 4)
```

Trace d'exécution.

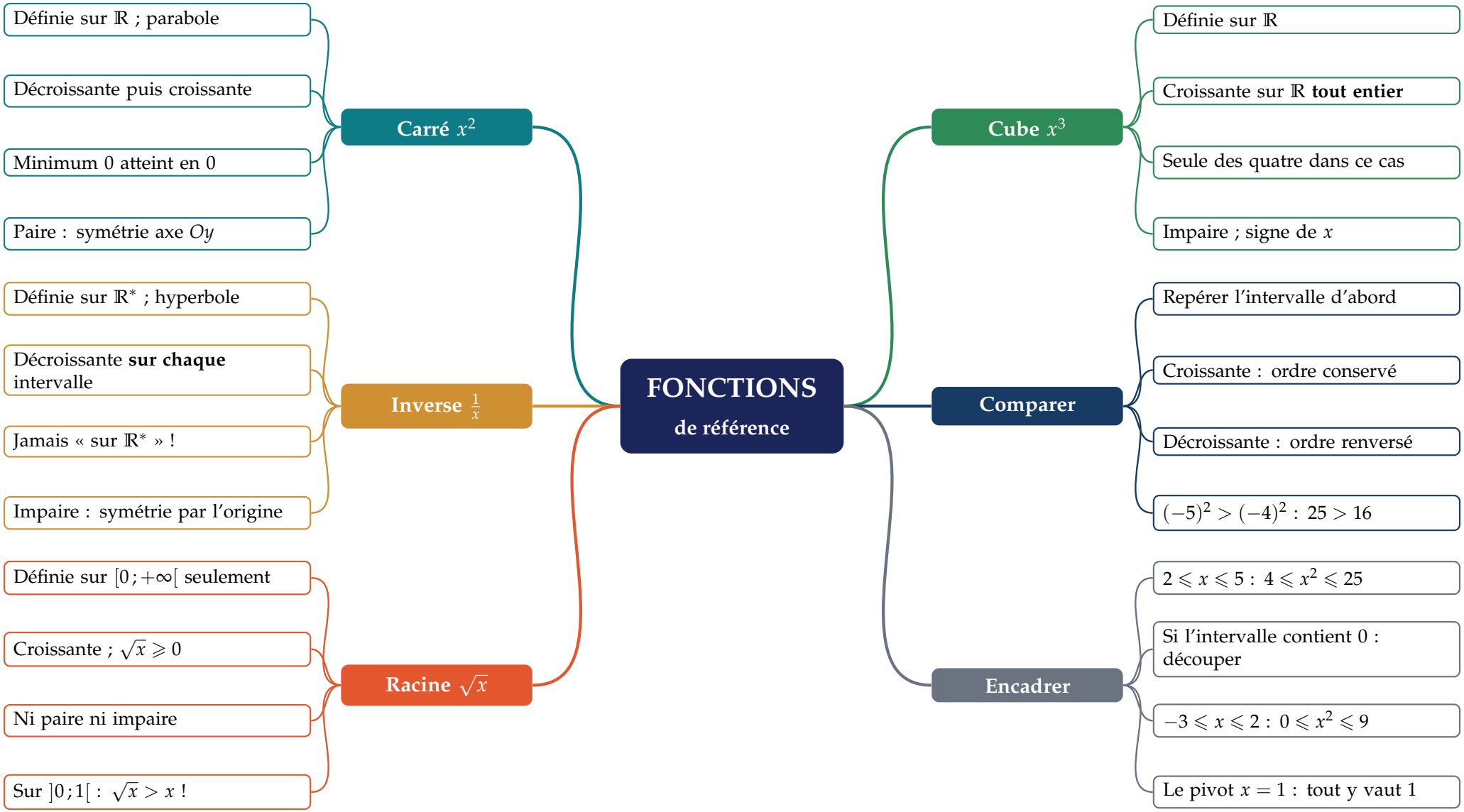
```
x, x**2, 1/x, sqrt(x), x**3
0.25 0.0625 4.0 0.5 0.015625
0.5 0.25 2.0 0.7071067811865476 0.125
1 1 1.0 1.0 1
2 4 0.5 1.4142135623730951 8
4 16 0.25 2.0 64
carre sur les negatifs :  25 16
racine et identite :  True False
```

Interprétation. La ligne $x = 1$ est le pivot : les quatre fonctions y valent 1. **Avant** 1, le carré et le cube *diminuent* le nombre ($0{,}25^2 = 0{,}0625$) tandis que la racine l'*augmente* ($\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$) ; **après** 1, tout

s'inverse. La dernière ligne le confirme : *True* puis *False*, exactement la remarque du §3. Et $25 > 16$ rappelle que le carré renverse l'ordre sur les négatifs.

Remarque — Les trois réflexes du chapitre

1. Connaître par cœur les quatre tableaux : ils dispensent de tout recalcul. 2. La fonction inverse décroît *sur chaque intervalle*, jamais en traversant 0. 3. Pour comparer deux images : intervalle d'abord, sens de variation ensuite, conclusion enfin.



Chapitre 8 · Chaque branche renvoie à une section du cours et à une fiche méthode.