Chapitre 9. Cours

Équations de droites et systèmes

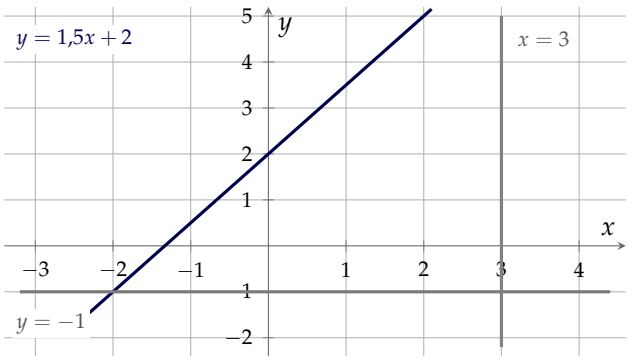
1. Équation réduite d'une droite

Le chapitre précédent a montré que la courbe d'une fonction affine est une droite. On renverse maintenant le point de vue : partant d'une droite tracée dans un repère, on cherche l'équation qui la caractérise. Toutes les droites ne sont pas des courbes de fonctions — les verticales échappent à la règle — et c'est précisément cette exception qui organise le chapitre.

Théorème 1.1 — Les deux formes d'équation

Dans un repère, toute droite admet une équation de l'un des deux types suivants, et un seul :

- $y = mx + p$ si la droite n'est pas verticale : c'est son **équation réduite** ;
- $x = c$ si la droite est **verticale**, où c est l'abscisse commune à tous ses points.



Trois droites : une oblique, une horizontale (coefficient directeur nul), une verticale — la seule qui n'a pas d'équation réduite.

Attention — La droite verticale n'est pas une fonction

Une verticale $x = 3$ associe à l'abscisse 3 une infinité d'ordonnées : ce n'est donc pas la courbe d'une fonction. C'est pour cette unique raison qu'elle ne s'écrit pas $y = mx + p$. Toute autre droite, si penchée soit-elle, en admet une.

Propriété 1.2 — Lecture de m et de p

Dans $y = mx + p$:

- p est l'**ordonnée à l'origine** : la droite coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;p)$;
- m est le **coefficient directeur** : lorsqu'on avance de 1 en abscisse, on monte de m.

Méthode 1.3 — Lire une équation sur un graphique

1. Repérer l'intersection avec l'axe des ordonnées : elle donne p.
2. Partir de ce point, avancer d'une unité vers la droite, et compter le déplacement vertical : il donne m (positif si l'on monte, négatif si l'on descend).

3. Contrôler sur un troisième point de la droite.

2. Coefficient directeur et point

Théorème 2.1 — Coefficient directeur par deux points

Soit $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points distincts avec $x_A \neq x_B$. La droite (AB) a pour coefficient directeur

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Démonstration

Si (AB) a pour équation $y = mx + p$, alors $y_A = mx_A + p$ et $y_B = mx_B + p$. En soustrayant membre à membre, $y_B - y_A = m\,(x_B - x_A)$, et comme $x_B - x_A \neq 0$ on peut diviser. ■

Exercice d'application

Calculer le coefficient directeur de la droite passant par $A(-1\,;5)$ et $B(3\,;-3)$.

Solution. $m = \dfrac{-3-5}{3-(-1)} = \dfrac{-8}{4} = -2$. La droite descend de 2 chaque fois que l'on avance de 1.

Méthode 2.2 — Équation réduite à partir de deux points

1. Vérifier que $x_A \neq x_B$. Si $x_A = x_B$, la droite est verticale et son équation est $x = x_A$: le travail est terminé.
2. Calculer $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
3. Écrire $y = mx + p$ et déterminer p en remplaçant x et y par les coordonnées de A.
4. Vérifier avec B.

Exemple 2.3

Droite passant par $A(1\,;4)$ et $B(3\,;10)$.
$m = \dfrac{10-4}{3-1} = \dfrac{6}{2} = 3$, donc $y = 3x + p$. Avec A : $4 = 3 \times 1 + p$, d'où $p = 1$.
L'équation réduite est $y = 3x + 1$. Contrôle avec B : $3 \times 3 + 1 = 10$ ✓.

Exemple 2.4 — Le cas vertical

Droite passant par $A(2\,;-1)$ et $B(2\,;5)$. Ici $x_A = x_B = 2$: la droite est verticale, d'équation $x = 2$. Le quotient du théorème 2.1 serait une division par zéro — c'est le signal.

Propriété 2.5 — Appartenance d'un point

Un point $M(x_M\,;y_M)$ appartient à la droite d'équation $y = mx + p$ si et seulement si $y_M = mx_M + p$. On dit que ses coordonnées **vérifient** l'équation.

Exercice d'application

Les points $C(4\,;13)$ et $D(-2\,;-4)$ appartiennent-ils à la droite $y = 3x + 1$?
Solution. Pour C : $3 \times 4 + 1 = 13 = y_C$, donc C appartient à la droite.
Pour D : $3 \times (-2) + 1 = -5$, or $y_D = -4 \neq -5$: D n'appartient pas à la droite.

3. Droites parallèles et sécantes

Théorème 3.1 — Critère de parallélisme

Deux droites non verticales, d'équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$, sont :
- **parallèles** si et seulement si $m = m'$;
- **sécantes** si et seulement si $m \neq m'$ — elles ont alors exactement un point commun.

Si de plus $m = m'$ et $p = p'$, les droites sont confondues.

Exercice d'application

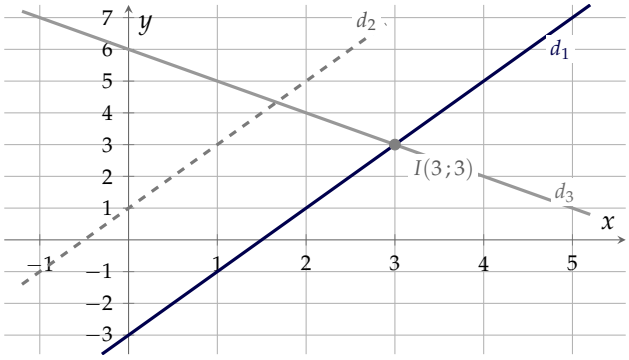
Les droites $d_1 : y = 2x - 3$ et $d_2 : y = 2x + 1$ sont-elles sécantes ? Et d_1 et $d_3 : y = -x + 6$?
Solution. d_1 et d_2 ont le même coefficient directeur 2 mais des ordonnées à l'origine différentes : elles sont *strictement parallèles*, sans point commun.
d_1 et d_3 ont pour coefficients 2 et -1, distincts : elles sont *sécantes* en un unique point.

Méthode 3.2 — Point d'intersection de deux droites

1. S'assurer que les coefficients directeurs diffèrent.
2. Écrire l'égalité $mx + p = m'x + p'$: c'est l'abscisse commune que l'on cherche.
3. Résoudre cette équation du premier degré ; on obtient x.
4. Reporter dans *l'une* des deux équations pour obtenir y, puis vérifier dans l'autre.

Exemple 3.3

Intersection de $d_1 : y = 2x - 3$ et $d_3 : y = -x + 6$.
$2x - 3 = -x + 6 \iff 3x = 9 \iff x = 3$. Alors $y = 2 \times 3 - 3 = 3$.
Contrôle dans d_3 : $-3 + 6 = 3$ ✓. Le point d'intersection est $I(3\,;3)$.



d_1 et d_2 ont la même pente : elles ne se rencontrent jamais. d_1 et d_3 se coupent en I.

4. Systèmes de deux équations à deux inconnues

Définition 4.1 — Système linéaire 2×2

Un **système de deux équations du premier degré à deux inconnues** s'écrit

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b', c' sont des réels donnés. Le **résoudre**, c'est trouver tous les couples $(x\,;y)$ vérifiant les deux égalités *en même temps*.

Propriété 4.2 — Interprétation géométrique

Chaque équation est celle d'une droite. Résoudre le système revient à chercher les points communs à ces deux droites. Trois cas seulement :

- les droites sont sécantes : **un unique couple** solution ;
- les droites sont strictement parallèles : **aucune** solution ;
- les droites sont confondues : une **infinité** de solutions.

Méthode 4.3 — Résolution par substitution

1. Choisir l'équation où une inconnue s'isole le plus simplement (coefficient 1 ou -1).
2. Exprimer cette inconnue en fonction de l'autre.
3. **Substituer** cette expression dans la seconde équation : on obtient une équation à une seule inconnue.
4. La résoudre, puis remonter pour obtenir la seconde inconnue.
5. Vérifier le couple dans les *deux* équations de départ.

Exemple 4.4 — Substitution

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

La première équation donne $x = 8 - 2y$. En reportant dans la seconde :

$$3(8-2y) - y = 3 \iff 24 - 6y - y = 3 \iff -7y = -21 \iff y = 3.$$

Puis $x = 8 - 2 \times 3 = 2$. Vérification : $2 + 6 = 8$ ✓ et $6 - 3 = 3$ ✓. La solution est le couple $(2\,;3)$.

Méthode 4.5 — Résolution par combinaison linéaire

1. Multiplier chaque équation par un nombre bien choisi pour que les coefficients d'une inconnue deviennent **opposés**.
2. Additionner les deux équations membre à membre : l'inconnue disparaît.
3. Résoudre l'équation obtenue, puis reporter dans l'une des équations de départ.
4. Vérifier dans les deux.

Exemple 4.6 — Combinaison

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$$

On multiplie la première par 2 et la seconde par 3 pour opposer les coefficients de y :

$$\begin{cases} 4x + 6y = 26 \\ 15x - 6y = 12 \end{cases}$$

L'addition donne $19x = 38$, donc $x = 2$. En reportant dans $2x + 3y = 13$: $4 + 3y = 13$, d'où $y = 3$.
Vérification dans la seconde équation : $5 \times 2 - 2 \times 3 = 10 - 6 = 4$ ✓. La solution est $(2\,;3)$.

Attention — Un couple, pas deux nombres séparés

La solution d'un système 2×2 est un **couple** $(x\,;y)$, que l'on écrit $\mathcal{S} = \{(2\,;3)\}$. Écrire « $x = 2$ et $y = 3$ » est correct, mais « $\mathcal{S} = \{2\,;3\}$ » est faux : cet ensemble contiendrait deux nombres au lieu d'un couple.

Exemple 4.7 — Les deux cas dégénérés

$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$: la seconde équation équivaut à $x + y = 5$. On aurait $3 = 5$: c'est impossible, donc $\mathcal{S} = \varnothing$. Les deux droites $y = -x + 3$ et $y = -x + 5$ sont strictement parallèles.

$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$: la seconde est le double de la première. Toute solution de l'une est solution de l'autre : les droites sont confondues et le système a une infinité de solutions, tous les couples $(x\,;3 - x)$.

5. Mise en équation d'un problème

Méthode 5.1 — Traduire un énoncé en système

1. **Nommer** les inconnues en précisant ce qu'elles désignent et leur unité.
2. Traduire chaque information chiffrée par une équation — il en faut autant que d'inconnues.
3. Résoudre le système par la méthode la plus économique.
4. **Revenir à l'énoncé** : vérifier la cohérence et répondre par une phrase.

Exemple 5.2

Au foyer du lycée, 3 cafés et 2 jus de fruits coûtent 8,50 euros ; 5 cafés et 4 jus coûtent 15,50 euros. Quel est le prix de chacun ?

Soit x le prix d'un café et y celui d'un jus, en euros.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8{,}5 \\ 5x + 4y = 15{,}5 \end{cases}$$

On multiplie la première par -2 : $-6x - 4y = -17$. En additionnant à la seconde : $-x = -1{,}5$, donc $x = 1{,}5$.
Puis $3 \times 1{,}5 + 2y = 8{,}5$, soit $2y = 4$ et $y = 2$.
Vérification : $5 \times 1{,}5 + 4 \times 2 = 7{,}5 + 8 = 15{,}5$ ✓.
Réponse. Un café coûte 1,50 euro et un jus de fruits 2 euros.

Remarque — Choisir sa méthode

La substitution est reine quand une inconnue a pour coefficient 1 ou -1. La combinaison l'emporte dès que tous les coefficients sont « gros » : dans l'exemple 4.6, isoler x aurait introduit des fractions dès la première ligne.

6. Avec Python : résoudre et tracer

```
def resoudre(a, b, c, ap, bp, cp):
  d = a * bp - ap * b    # determinant du systeme
  if d == 0:
     return "pas de solution unique"
  x = (c * bp - cp * b) / d
  y = (a * cp - ap * c) / d
  return (x, y)
print(resoudre(1, 2, 8, 3, -1, 3))
print(resoudre(2, 3, 13, 5, -2, 4))
print(resoudre(1, 1, 3, 2, 2, 10))
print(resoudre(3, 2, 8.5, 5, 4, 15.5))
```

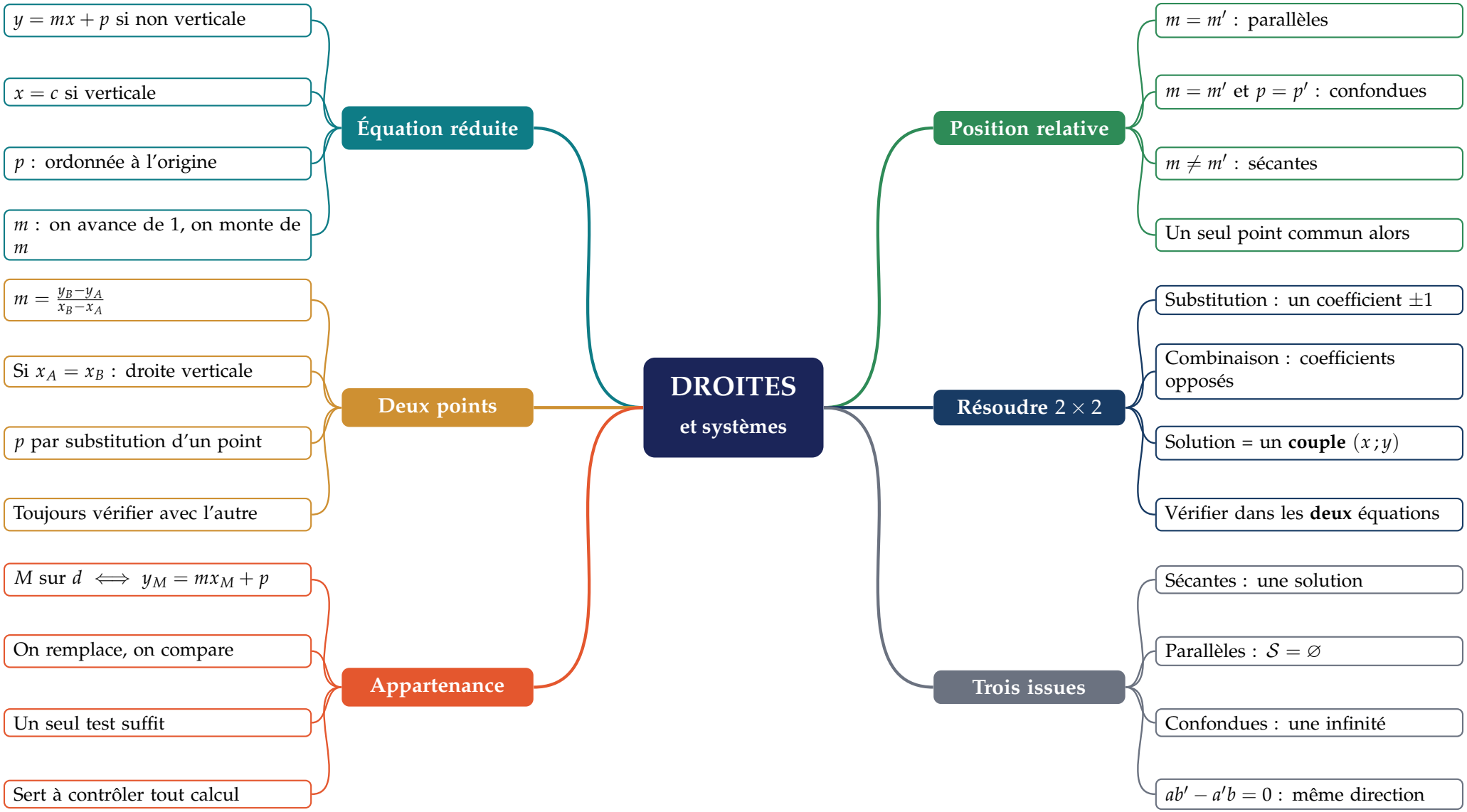
Trace d'exécution.

```
(2.0, 3.0)
(2.0, 3.0)
pas de solution unique
(1.5, 2.0)
```

Interprétation. Le nombre $d = ab' - a'b$ décide de tout : nul, les deux droites ont la même direction et il n'y a pas de solution unique ; non nul, elles sont sécantes et le couple est donné par les deux quotients. On retrouve exactement les résultats des exemples 4.4, 4.6, 4.7 et 5.2. Ce nombre s'appelle le **déterminant** du système — c'est le même que celui rencontré au chapitre 6 pour la colinéarité de deux vecteurs, et ce n'est pas un hasard : $ab' - a'b = 0$ signifie dans les deux cas « même direction ».

Remarque — Les trois réflexes du chapitre

1. Toute droite a une équation $y = mx + p$, sauf les verticales qui s'écrivent $x = c$. 2. Même coefficient directeur, droites parallèles ; coefficients différents, un unique point commun. 3. La solution d'un système 2×2 est un *couple*, et l'on vérifie toujours dans les deux équations.



Chapitre 9 · Chaque branche renvoie à une section du cours et à une fiche méthode.