Chapitre 10. Cours

Proportion et évolution

1. Proportion et pourcentage

Définition 1.1 — Proportion

Soit A une partie d'un ensemble E non vide, d'effectifs respectifs n_A et n_E. La **proportion** de A dans E est le quotient

$$p = \frac{n_A}{n_E}.$$

C'est un nombre de l'intervalle $[0\,;1]$, que l'on exprime souvent en pourcentage : $p = t\,\%$ signifie $p = \dfrac{t}{100}$.



Une proportion est une part du tout : la barre entière vaut 400 *individus, soit* 100 %.

Propriété 1.2 — Les trois calculs de base

Si p est la proportion de A dans E :

- l'effectif de la partie vaut $n_A = p \times n_E$;
- l'effectif total vaut $n_E = \dfrac{n_A}{p}$;
- la proportion du complémentaire vaut $1 - p$.

Exercice d'application

Dans un lycée de 1 250 élèves, 35 % sont en seconde et 180 élèves sont en terminale. Traduire ces deux données en effectif et en proportion.

Solution. $0{,}35 \times 1\,250 = 437{,}5$: le résultat n'est pas entier, l'énoncé donne donc un pourcentage arrondi et il y a environ 438 élèves de seconde. Pour les terminales, $\dfrac{180}{1\,250} = 0{,}144 = 14{,}4\,\%$.

Théorème 1.3 — Proportion de proportion

Si A est une partie de B, elle-même partie de E, alors la proportion de A dans E est le **produit** des deux proportions :

$$p_{A/E} = p_{A/B} \times p_{B/E}.$$

Démonstration

Par définition $p_{A/B} = \dfrac{n_A}{n_B}$ et $p_{B/E} = \dfrac{n_B}{n_E}$. Leur produit vaut $\dfrac{n_A}{n_B} \times \dfrac{n_B}{n_E} = \dfrac{n_A}{n_E} = p_{A/E}$. ■

Exercice d'application

Dans un lycée, 40 % des élèves sont en seconde, et parmi eux 55 % font de l'allemand. Quelle proportion de l'ensemble des élèves cela représente-t-il ?

Solution. $0{,}55 \times 0{,}40 = 0{,}22$, soit 22 % de l'ensemble des élèves du lycée.

Attention — Les pourcentages ne s'additionnent pas n'importe comment

On n'additionne des pourcentages que s'ils portent sur le **même ensemble de référence**. « 40 % des élèves sont en seconde et 55 % des secondes font de l'allemand » ne donne ni 95 % ni 15 % : les deux références diffèrent, et c'est un produit qu'il faut faire.

2. Coefficient multiplicateur

Définition 2.1 — Évolution et coefficient multiplicateur

Une grandeur passe de la valeur V_D (départ) à la valeur V_A (arrivée), avec $V_D \neq 0$. Le **coefficient multiplicateur** de cette évolution est

$$\text{CM} = \frac{V_A}{V_D}, \qquad \text{de sorte que} \qquad V_A = \text{CM} \times V_D.$$

Théorème 2.2 — Lien avec le taux d'évolution

Le **taux d'évolution** t est défini par $t = \dfrac{V_A - V_D}{V_D}$. Il est relié au coefficient multiplicateur par

$$\text{CM} = 1 + t \qquad \text{et} \qquad t = \text{CM} - 1.$$

Une hausse de t% correspond à $\text{CM} = 1 + \dfrac{t}{100}$; une baisse de t% à $\text{CM} = 1 - \dfrac{t}{100}$.

Démonstration

$$\text{CM} - 1 = \frac{V_A}{V_D} - 1 = \frac{V_A - V_D}{V_D} = t. \qquad \blacksquare$$

Évolution	+5 %	+20 %	−10 %	−25 %	−100 %
Coefficient	1,05	1,2	0,9	0,75	0

Un coefficient supérieur à 1 signale une hausse, inférieur à 1 une baisse. Il n'est jamais négatif.

Méthode 2.3 — Appliquer une évolution

1. Écrire le coefficient multiplicateur $\text{CM} = 1 + \dfrac{t}{100}$, en respectant le signe de t.
2. Multiplier la valeur de départ par ce coefficient.
3. Contrôler l'ordre de grandeur : une hausse doit augmenter, une baisse diminuer.

Exemple 2.4

Un article à 80 euros subit une hausse de 15 % : le coefficient est 1,15 et le nouveau prix $80 \times 1{,}15 = 92$ euros. Le même article soldé à -30 % coûterait $80 \times 0{,}7 = 56$ euros.

Méthode 2.5 — Retrouver un taux

1. Calculer $\mathrm{CM} = \dfrac{V_A}{V_D}$.
2. En déduire $t = \mathrm{CM} - 1$, puis convertir en pourcentage.
3. Le signe de t donne le sens : positif, c'est une hausse ; négatif, une baisse.

Exemple 2.6

Une population passe de 2 500 à 2 850 habitants : $\mathrm{CM} = \dfrac{2\,850}{2\,500} = 1{,}14$ et $t = +14$ %, une hausse de 14 %. Si elle était passée de 2 500 à 2 150 : $\mathrm{CM} = 0{,}86$ et $t = -14$ %.

Attention — Le taux se calcule toujours sur la valeur de départ

Le dénominateur de t est V_D, jamais V_A. Passer de 50 à 60 est une hausse de 20 % ; revenir de 60 à 50 est une baisse de $\dfrac{10}{60} \approx 16{,}7$ % : les références diffèrent, les taux ne sont pas opposés.

3. Évolutions successives

Théorème 3.1 — Composition

Lorsqu'une grandeur subit plusieurs évolutions successives de coefficients $\mathrm{CM}_1, \mathrm{CM}_2, \ldots, \mathrm{CM}_n$, l'évolution globale a pour coefficient multiplicateur le **produit**

$$\mathrm{CM}_{\text{global}} = \mathrm{CM}_1 \times \mathrm{CM}_2 \times \cdots \times \mathrm{CM}_n.$$

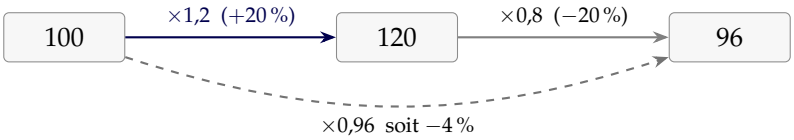
Démonstration

Après la première évolution la valeur vaut $\mathrm{CM}_1 \times V_D$; après la deuxième, $\mathrm{CM}_2 \times \mathrm{CM}_1 \times V_D$, et ainsi de suite. Le produit des coefficients apparaît en facteur de V_D : c'est bien le quotient $\dfrac{V_A}{V_D}$. ■

Exercice d'application

Un prix augmente de 20 %, puis diminue de 20 %. Retrouve-t-il sa valeur initiale ?

Solution. Le coefficient global vaut $1{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}96$, soit $t = -0{,}04$: le prix a *baissé* de 4 %. Sur 100 euros : $100 \to 120 \to 96$. La baisse de 20 % porte sur 120 et non sur 100, c'est ce qui rompt la symétrie.



Théorème 3.2 — Évolution réciproque

L'évolution qui ramène V_A à V_D a pour coefficient multiplicateur $\dfrac{1}{\text{CM}}$: c'est l'**inverse**, et non l'opposé du taux.

Exemple 3.3

Un prix a augmenté de 25 % (CM $= 1{,}25$). Pour revenir au prix initial, il faut le multiplier par $\dfrac{1}{1{,}25} = 0{,}8$, soit une baisse de 20 % — et non de 25 %.

Méthode 3.4 — Taux moyen d'évolution

Pour deux évolutions successives de coefficient global CM, le **taux moyen** est le taux t_m qui, appliqué deux fois, donnerait le même résultat : il vérifie $(1+t_m)^2 = \text{CM}$, donc $1+t_m = \sqrt{\text{CM}}$.

Exemple 3.5

Un capital augmente de 21 % en deux ans. Le coefficient global est 1,21 et $\sqrt{1{,}21} = 1{,}1$: le taux moyen annuel est de $+10$ %.
Contrôle : $1{,}1 \times 1{,}1 = 1{,}21$ ✓.

4. Points de pourcentage et indices

Définition 4.1 — Point de pourcentage

Lorsqu'une grandeur *déjà exprimée en pourcentage* varie, on distingue :
- la variation **en points** : la simple différence des deux pourcentages ;
- la variation **en pourcentage** : le taux d'évolution habituel.

Exercice d'application

Le taux de réussite d'un examen passe de 80 % à 84 %. Exprimer cette évolution des deux manières.

Solution. En points : $84 - 80 = 4$, le taux a gagné **4 points**.
En pourcentage : $\dfrac{84-80}{80} = 0{,}05$, soit une hausse de 5 % du taux de réussite.
Les deux affirmations sont exactes et décrivent le même fait : elles ne se contredisent pas, elles ne mesurent pas la même chose.

Définition 4.2 — Indice base 100

On choisit une valeur de référence V_0 à laquelle on attribue l'indice 100. L'indice d'une valeur V est alors

$$I = \frac{V}{V_0} \times 100.$$

Un indice de 117 signifie une hausse de 17 % par rapport à la référence ; un indice de 92, une baisse de 8 %.

Exemple 4.3

Un loyer vaut 650 euros en 2020 et 715 euros en 2024. En base 100 en 2020, l'indice de 2024 vaut $\dfrac{715}{650} \times 100 = 110$: le loyer a augmenté de 10 % sur la période.

Remarque — L'intérêt de l'indice

L'indice ramène à une même base des grandeurs d'unités différentes — un loyer en euros, une population en habitants — de sorte que deux séries se lisent directement l'une contre l'autre.

5. Avec Python : évolutions en chaîne

```
def coeff(t):
  return 1 + t / 100
def appliquer(valeur, taux):
  for t in taux:
     valeur = valeur * coeff(t)
  return valeur
def taux_global(taux):
  c = 1
  for t in taux:
     c = c * coeff(t)
  return round((c - 1) * 100, 2)
cas = [(100, [20, -20]), (80, [15]),
         (1000, [10, 10]), (200, [-50, 100])]
for v, t in cas:
  print(round(appliquer(v, t), 2), taux_global(t))
```

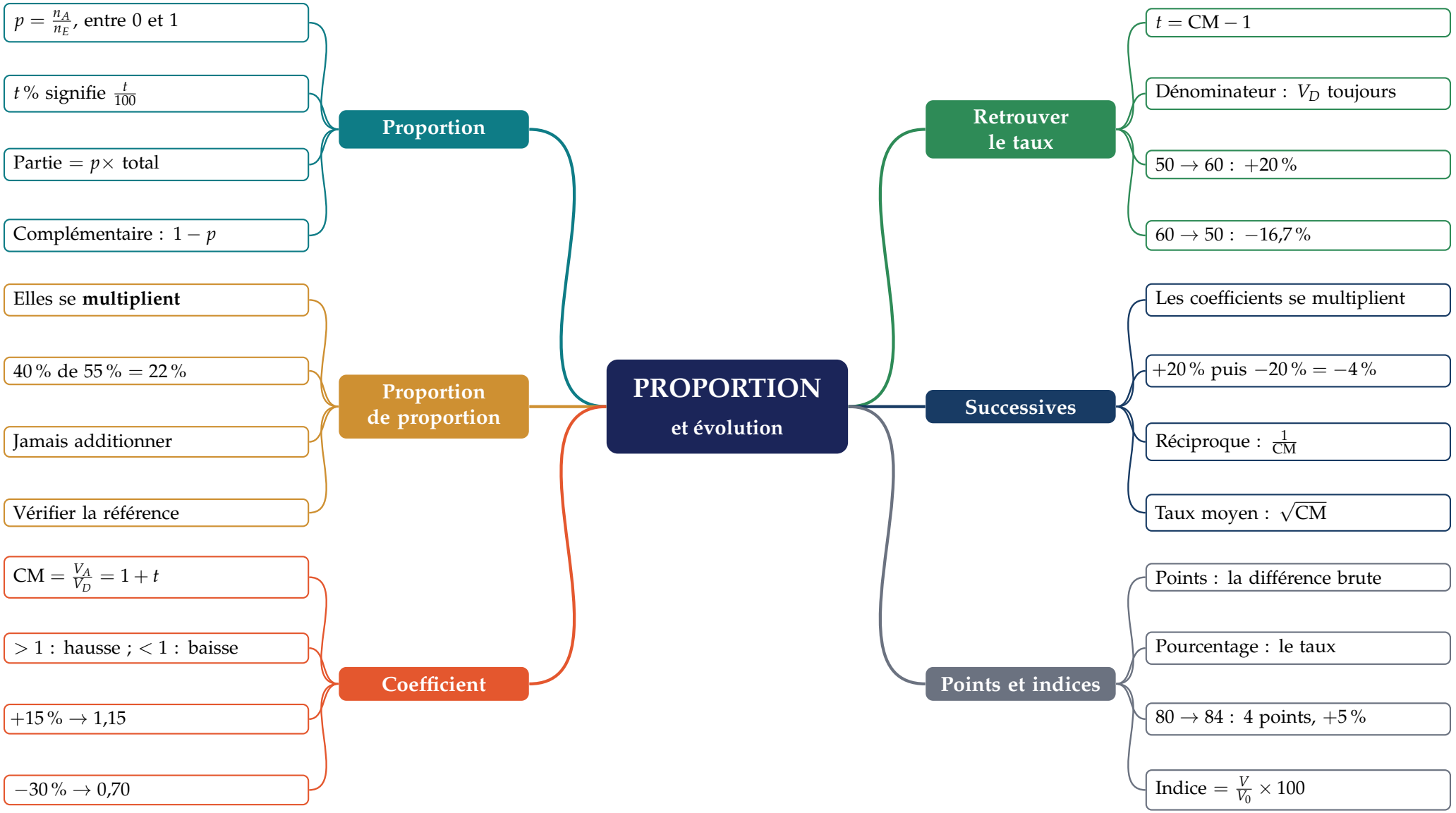
Trace d'exécution.

```
96.0 -4.0      92.0 15.0      1210.0 21.0      200.0 0.0
```

Interprétation. La première ligne confirme le résultat contre-intuitif de la section 3 : $+20\,\%$ puis $-20\,\%$ donne $-4\,\%$. La troisième montre que deux hausses de 10 % font $+21\,\%$ et non $+20\,\%$ — c'est l'exemple 3.5 lu à l'envers. La dernière est le seul cas où l'aller-retour est exact : $-50\,\%$ puis $+100\,\%$ ramène au départ, car $0{,}5 \times 2 = 1$. L'appel à `round` n'est pas décoratif : sans lui la machine affiche $-4{,}000000000000004$, car elle n'écrit pas exactement 1,2 en binaire — une limite du calcul flottant, non une erreur de mathématiques.

Remarque — Les trois réflexes du chapitre

1. Tout passe par le coefficient multiplicateur $1 + \dfrac{t}{100}$: hausse au-dessus de 1, baisse en dessous.
2. Des évolutions successives se *multiplient* ; leurs taux ne s'additionnent pas. 3. Pour annuler une évolution on prend l'*inverse* du coefficient, pas l'opposé du taux.



Chapitre 10 · Chaque branche renvoie à une section du cours et à une fiche méthode.