Chapitre 12. Cours

Probabilités

1. Expérience aléatoire et univers

Définition 1.1

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît tous les résultats possibles sans pouvoir prévoir lequel se produira. Ces résultats sont les **issues** ; l'ensemble de toutes les issues est l'**univers**, noté Ω.
Un **événement** est un sous-ensemble de Ω : c'est un regroupement d'issues.

Exemple 1.2

On lance un dé équilibré à six faces. L'univers est $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$.
L'événement « obtenir un nombre pair » est $A = \{2\,;4\,;6\}$; il est composé de trois issues.
L'événement « obtenir 7 » est l'**événement impossible**, noté $\varnothing$; l'événement « obtenir un nombre inférieur à 10 » est l'**événement certain**, égal à Ω.

Définition 1.3 — Loi de probabilité

Définir une **loi de probabilité** sur Ω, c'est associer à chaque issue ω_i un nombre p_i de $[0\,;1]$ tel que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

La **probabilité d'un événement** est la somme des probabilités des issues qui le composent.

Attention — Le contrôle qui ne coûte rien

La somme des probabilités des issues vaut toujours 1. Si elle ne fait pas 1, une valeur est fausse ou une issue a été oubliée : ce contrôle attrape la majorité des erreurs du chapitre.

2. Situation d'équiprobabilité

Définition 2.1

Il y a **équiprobabilité** lorsque toutes les issues ont la même probabilité. Si Ω compte n issues, chacune a alors la probabilité $\dfrac{1}{n}$.

Théorème 2.2

En situation d'équiprobabilité, pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre d'issues de } \Omega} = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}}.$$

Exemple 2.3

Avec le dé équilibré, $P(\text{pair}) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ et $P(\text{obtenir un 5}) = \dfrac{1}{6}$.
Dans une urne contenant 4 boules rouges et 6 boules vertes, tirer une boule au hasard donne $P(\text{rouge}) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$.

Attention — L'équiprobabilité se justifie

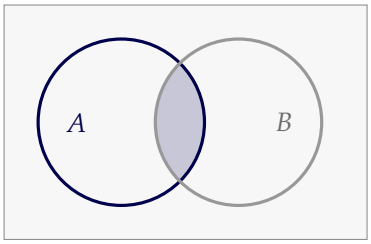
Les mots « équilibré », « au hasard », « indiscernables au toucher » sont les signaux d'équiprobabilité de l'énoncé. Sans eux, il faut une loi donnée explicitement. Un dé truqué ou une urne où les boules n'ont pas la même taille ne relèvent pas du théorème 2.2.

3. Opérations sur les événements

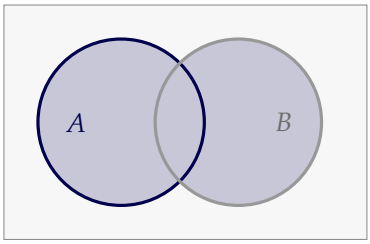
Définition 3.1

Soit A et B deux événements.

- L'**intersection** $A \cap B$ (« A *et* B ») est l'événement formé des issues appartenant aux deux.
- La **réunion** $A \cup B$ (« A *ou* B ») est l'événement formé des issues appartenant à l'un au moins.
- L'**événement contraire** $\overline{A}$ est formé des issues de Ω qui ne sont pas dans A.
- A et B sont **incompatibles** lorsque $A \cap B = \varnothing$: ils ne peuvent pas se produire ensemble.



$A \cap B$: la zone commune



$A \cup B$: les deux disques

Théorème 3.2 — Probabilité du contraire

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A).$$

Démonstration

A et $\overline{A}$ n'ont aucune issue commune et leur réunion est Ω tout entier. La somme de leurs probabilités vaut donc $P(\Omega) = 1$. ■

Théorème 3.3 — Probabilité d'une réunion

Pour tous événements A et B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Si A et B sont incompatibles, $P(A \cap B) = 0$ et la formule devient $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Démonstration

En additionnant $P(A)$ et $P(B)$, les issues de $A \cap B$ sont comptées *deux fois* : une fois dans A, une fois dans B. On les retranche une fois pour rétablir le compte. ■

Méthode 3.4 — Le réflexe « au moins un »

Un événement du type « obtenir **au moins un** ... » a pour contraire « n'en obtenir **aucun** », qui est presque toujours plus simple à dénombrer. On calcule donc

$$P(\text{au moins un}) = 1 - P(\text{aucun}).$$

4. Tableaux et arbres

Méthode 4.1 — Tableau à double entrée

Quand deux caractères se croisent, on dresse un tableau : les effectifs des cases se lisent directement, et les totaux des lignes et des colonnes servent de contrôle. La probabilité d'un événement est alors le quotient de l'effectif correspondant par l'effectif total.

Exemple 4.2

Sur 200 élèves, on croise le sexe et la pratique d'un sport.

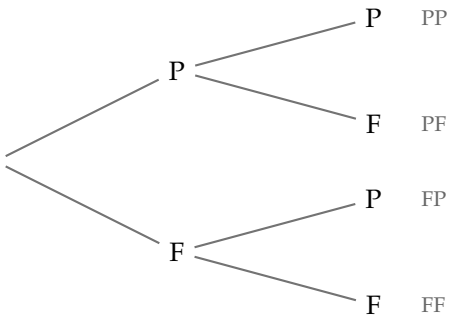
	Sportif	Non sportif	Total
Filles	66	44	110
Garçons	54	36	90
Total	120	80	200

On choisit un élève au hasard. Alors $P(\text{fille}) = \dfrac{110}{200} = 0{,}55$ et $P(\text{fille et sportive}) = \dfrac{66}{200} = 0{,}33$.

Pour la réunion : $P(\text{fille ou sportif}) = \dfrac{110}{200} + \dfrac{120}{200} - \dfrac{66}{200} = \dfrac{164}{200} = 0{,}82$.

Méthode 4.3 — Arbre de dénombrement

Pour une expérience à deux étapes, on construit un arbre : chaque chemin décrit une issue. En situation d'équiprobabilité, on compte les chemins favorables et on divise par le nombre total de chemins.



4 chemins équiprobables : chacun a la probabilité $\frac{1}{4}$.

Deux lancers d'une pièce équilibrée. « Au moins un pile » regroupe trois chemins : sa probabilité vaut $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$.

5. Fréquence et probabilité

Propriété 5.1 — Stabilisation des fréquences

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence observée d'un événement se rapproche de sa probabilité. C'est ce constat expérimental qui donne son sens concret à la notion de probabilité.

Attention — Ce que la probabilité ne dit pas

Une probabilité de $\frac{1}{2}$ ne garantit pas cinq piles sur dix lancers : elle décrit une tendance *à long terme*. Croire qu'après quatre piles consécutifs « face est plus probable » est une erreur classique — la pièce n'a pas de mémoire.

6. Avec Python : simuler pour observer

```
from random import randint
def deux_des(n):
  sept = 0
  for i in range(n):
    if randint(1, 6) + randint(1, 6) == 7:
      sept = sept + 1
  return sept / n
for n in [100, 1000, 10000, 100000]:
  print(n, round(deux_des(n), 4))
print("valeur exacte :", round(6 / 36, 4))
```

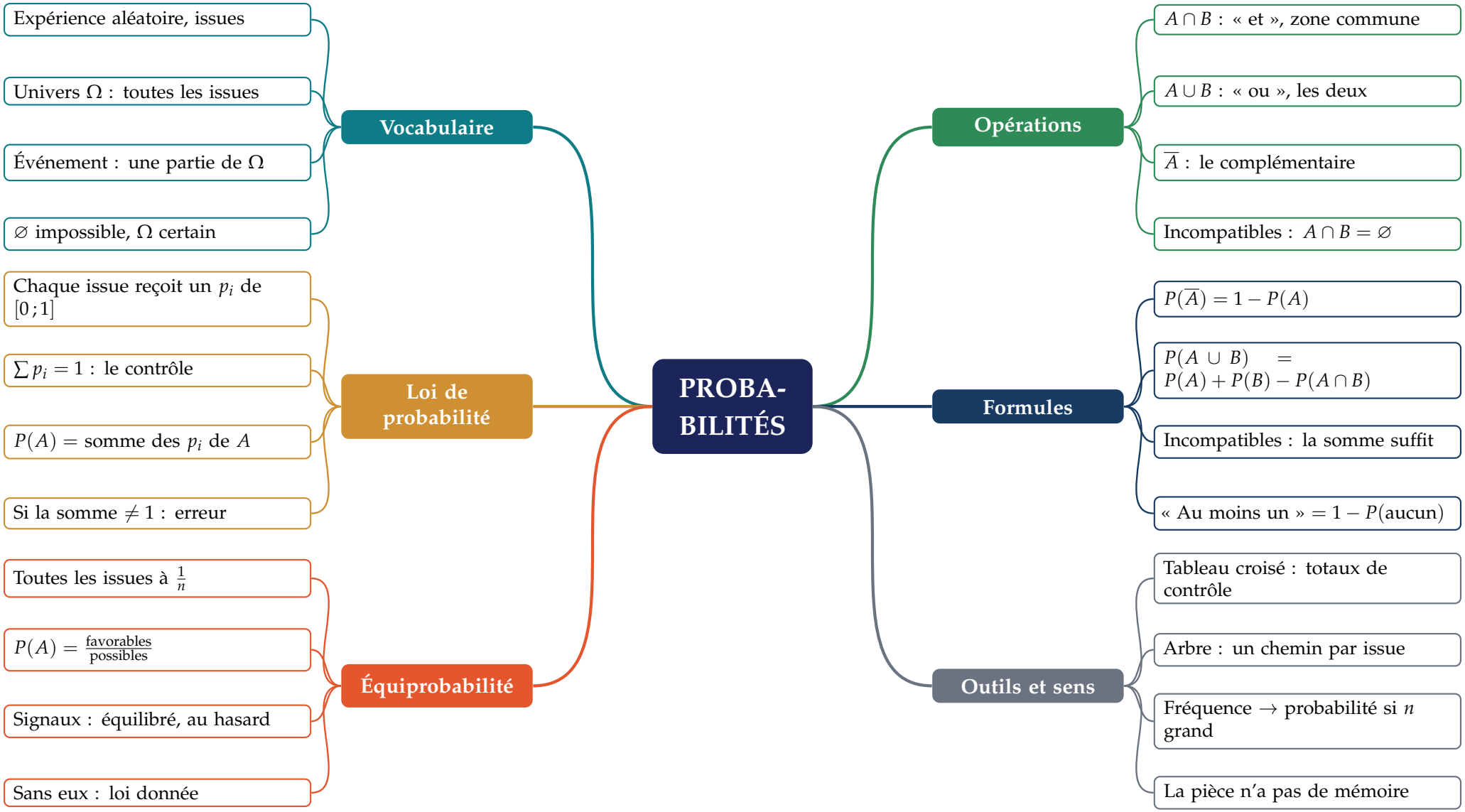
Trace d'exécution (les valeurs simulées varient d'un essai à l'autre).

```
100 0.13
1000 0.174
10000 0.1653
100000 0.1671
valeur exacte :  0.1667
```

Interprétation. La fréquence observée s'approche de $\frac{1}{6} \approx 0{,}1667$ à mesure que n grandit : c'est la stabilisation de la propriété 5.1, visible en quatre lignes. Sur 100 lancers l'écart est encore de plus de trois centièmes ; sur 100 000 il tombe sous le millième. Attention toutefois : la simulation *illustre* la probabilité, elle ne la démontre pas — seul le dénombrement des 6 couples favorables sur 36 le fait.

Remarque — Les trois réflexes du chapitre

1. La somme des probabilités des issues vaut 1 : c'est le premier contrôle de toute loi. 2. En équiprobabilité, tout se ramène à compter les cas favorables et les cas possibles. 3. « Au moins un » se calcule par le contraire : $1 - P(\text{aucun})$.



Chapitre 12 · Chaque branche renvoie à une section du cours et à une fiche méthode.