Chapitre 1. Cours

Le second degré

I. Fonction polynôme du second degré

1. Définition

Définition

Une **fonction polynôme du second degré** (ou **trinôme du second degré**) est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{où } a \neq 0 \text{ et } b, c \in \mathbb{R}.$$

Par abus de langage, l'expression $ax^2 + bx + c$ est elle aussi appelée trinôme du second degré.

Exemple

Sont des trinômes du second degré : $3x^2 - x + 4$; $5 - x^2$; $(x-3)^2 + 2x$; $2x^2 + 1 - \frac{1}{2}x$.
Ne le sont pas : $bx + c$ (degré 1) ; $x^3 + 4x^2 - 1$ (degré 3) ; $(x+2)^2 - (x-3)^2$, car en développant on obtient $10x - 5$, de degré 1 : *le terme en x^2 disparaît*.

2. Forme canonique

Propriété 1

Toute fonction polynôme f du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) peut s'écrire

$$f(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta \qquad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha).$$

Cette écriture s'appelle la **forme canonique** de f.

Méthode — mettre sous forme canonique

✓ Mettre a en facteur dans les deux premiers termes.
✓ Considérer ces deux termes comme le début d'un carré parfait.
✓ Ajouter puis retrancher le carré introduit.
✓ Réduire l'expression.

Exemple

$x^2 + 2x - 3 = \underbrace{(x+1)^2 - 1}_{x^2+2x} - 3 = (x+1)^2 - 4.$

$2x^2 + 12x + 11 = 2\left(x^2 + 6x\right) + 11 = 2\left[(x+3)^2 - 9\right] + 11 = 2(x+3)^2 - 7.$

$2x^2 + 6x + 10 = 2\left(x^2 + 3x\right) + 10 = 2\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] + 10 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{2}.$

Exercice 1 application

Donner la forme canonique des trinômes suivants.

a. x^2+2x-3 b. $2x^2+12x+11$ c. $2x^2+6x+10$

3. Variations et courbe représentative

Propriété 2

Soit $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a\neq 0$. Le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

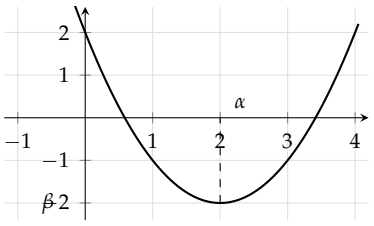
cas $a<0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

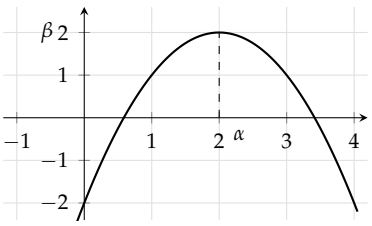
cas $a>0$

Dans un repère, la courbe $\mathcal{P}$ de f est la **parabole de sommet** $S(\alpha\,;\beta)$. Elle admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x=\alpha$.

Cas $a>0$



Cas $a<0$



Exercice 2 application

Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-3x^2+5x-1$, puis vérifier à la calculatrice.

II. Équation du second degré

1. Discriminant

Définition

Soit $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$). Sa forme canonique s'écrit $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$. Le nombre $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$ est appelé **discriminant** de f.

2. Résolution de $ax^2+bx+c=0$

On part de la forme canonique :

$$ax^2+bx+c=0 \iff a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}.$$

Trois cas se présentent.

✓ **Si** $\Delta<0$, alors $-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$, donc $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$: l'expression ne s'annule jamais, l'équation **n'a pas de solution**.

✓ **Si** $\Delta=0$, l'équation devient $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$: elle admet **une unique solution** $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.

✓ **Si** $\Delta>0$, alors $\sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}}=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$ existe et l'on factorise par différence de deux carrés :

$$\begin{aligned}a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] &= a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\\ &= a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right).\end{aligned}$$

L'équation admet donc **deux solutions**.

Théorème 1

Soit $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant de l'équation $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$).

☞ Si $\Delta<0$, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

☞ Si $\Delta=0$, elle admet une unique solution $x_0=-\dfrac{b}{2a}$, appelée *solution double*.

☞ Si $\Delta>0$, elle admet deux solutions : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple

$4x^2-5x+1=0$ $a=4, b=-5, c=1$	$5x^2+4x+2=0$ $a=5, b=4, c=2$	$3x^2-18x+27=0$ $a=3, b=-18, c=27$
$\Delta=(-5)^2-4\times4\times1=9$ $\Delta>0$: deux solutions $x_1=\dfrac{5-3}{8}=\dfrac{1}{4}$, $x_2=\dfrac{5+3}{8}=1$ $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{1}{4};1\right\}$	$\Delta=4^2-4\times5\times2=-24$ $\Delta<0$: aucune solution $\mathcal{S}=\varnothing$	$\Delta=(-18)^2-4\times3\times27=0$ $\Delta=0$: solution double $x_0=-\dfrac{-18}{2\times3}=3$ $\mathcal{S}=\{3\}$

Exercice 3 application

Résoudre les équations suivantes.

a. $x^2-5x+6=0$ b. $2x^2-8=0$ c. $x^2+4x+4=0$

Attention

Avant de calculer Δ, il faut ramener l'équation à la forme $ax^2+bx+c=0$. Pour une équation avec dénominateurs, on précise d'abord les **valeurs interdites**, puis on réduit au même dénominateur.

III. Factorisation et signe du trinôme

1. Factorisation

Théorème 2

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, avec x_1 et x_2 les deux racines : $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$, avec $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$: $f(x) = a\,(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$: $f(x)$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$.

2. Signe du trinôme

Premier cas : $\Delta > 0$, deux racines distinctes $x_1 < x_2$ et $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$	signe de a		0	signe de $-a$	0		signe de a

Remarque

Un trinôme $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a, sauf entre ses racines éventuelles.

Deuxième cas : $\Delta = 0$. $f(x) = a\,(x - x_0)^2$ est du signe de a pour tout $x \neq -\dfrac{b}{2a}$, et s'annule en x_0.

Troisième cas : $\Delta < 0$. Le trinôme est du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$: il ne s'annule jamais.

Exercice 4 application

Résoudre les inéquations suivantes.

a. $x^2 - 4 > 0$ b. $-x^2 + 3x \geqslant 0$ c. $x^2 + x + 1 > 0$

IV. Sommet, extremum et variations

Théorème 3

La fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) présente un extremum en $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

✓ Sa courbe $\mathcal{C}_f$ est une parabole de sommet $S\left(-\dfrac{b}{2a}\,;-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

✓ Cet extremum vaut $-\dfrac{\Delta}{4a}$ et il est atteint en $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

✓ C'est un **minimum** si $a > 0$, un **maximum** si $a < 0$.

Exercice 5 application

Dresser le tableau de variations des fonctions $f(x) = 4x^2 - 2x + 7$ et $g(x) = -3x^2 + 4x - 1$.

V. Somme et produit des racines (approfondissement)

Théorème 4

On considère le trinôme ax^2+bx+c avec $a \neq 0$.

1. S'il admet deux racines x_1 et x_2, alors $S = x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.
2. Réciproquement, les solutions du système $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$, si elles existent, sont les racines du trinôme $X^2 - SX + P$.

Démonstration

1. Si $\Delta > 0$, $x_1+x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$, et $x_1x_2 = \dfrac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \dfrac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$. **2.** Le système est symétrique : si (x,y) est solution, (y,x) l'est aussi. En posant $x+y=S$ et $xy=P$, les deux nombres x et y ont pour somme S et pour produit P : d'après le point 1, ce sont les racines de X^2-SX+P.

Remarque

- Si a et c sont de **signes opposés**, alors $\Delta = b^2-4ac > 0$: l'équation admet toujours deux solutions distinctes.
- Si l'équation est **incomplète** ($b=0$ ou $c=0$) ou si le membre de gauche est déjà factorisé, il est inutile de calculer Δ.
- Si l'on connaît une racine, l'autre s'obtient par $x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a}$ ou $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.

VI. Équation bicarrée (approfondissement)

Méthode — résoudre $ax^4+bx^2+c=0$

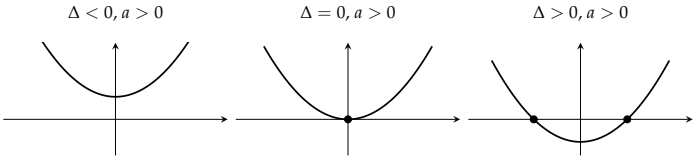
1. Poser $X = x^2$, avec la condition $X \geqslant 0$.
2. L'équation devient $aX^2+bX+c=0$: la résoudre en X.
3. Ne retenir que les solutions **positives ou nulles**.
4. Revenir à x : pour chaque X retenue, $x = \pm\sqrt{X}$.

Exemple

$-4x^4+13x^2-3=0$. On pose $X=x^2 \geqslant 0$: $-4X^2+13X-3=0$, $\Delta = 169-48 = 121$, $\sqrt{\Delta}=11$. $X_1 = \dfrac{-13-11}{-8} = 3$ et $X_2 = \dfrac{-13+11}{-8} = \dfrac{1}{4}$. Les deux sont positives, donc $x = \pm\sqrt{3}$ ou $x = \pm\dfrac{1}{2}$: $\mathcal{S} = \left\{-\sqrt{3}\,;-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;\sqrt{3}\right\}$.

VII. Synthèse

	Solutions de $ax^2+bx+c=0$	**Signe de** $P(x)$	**Factorisation**	**Position de la parabole**
$\Delta<0$	Pas de solution	Signe de a sur $\mathbb{R}$	Pas de factorisation	Ne coupe pas l'axe des abscisses
$\Delta=0$	Une solution double $x_0=-\dfrac{b}{2a}$	Signe de a, nul en x_0	$a\,(x-x_0)^2$	Tangente à l'axe des abscisses
$\Delta>0$	$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	Signe de a, sauf entre les racines	$a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$	Traverse l'axe en deux points



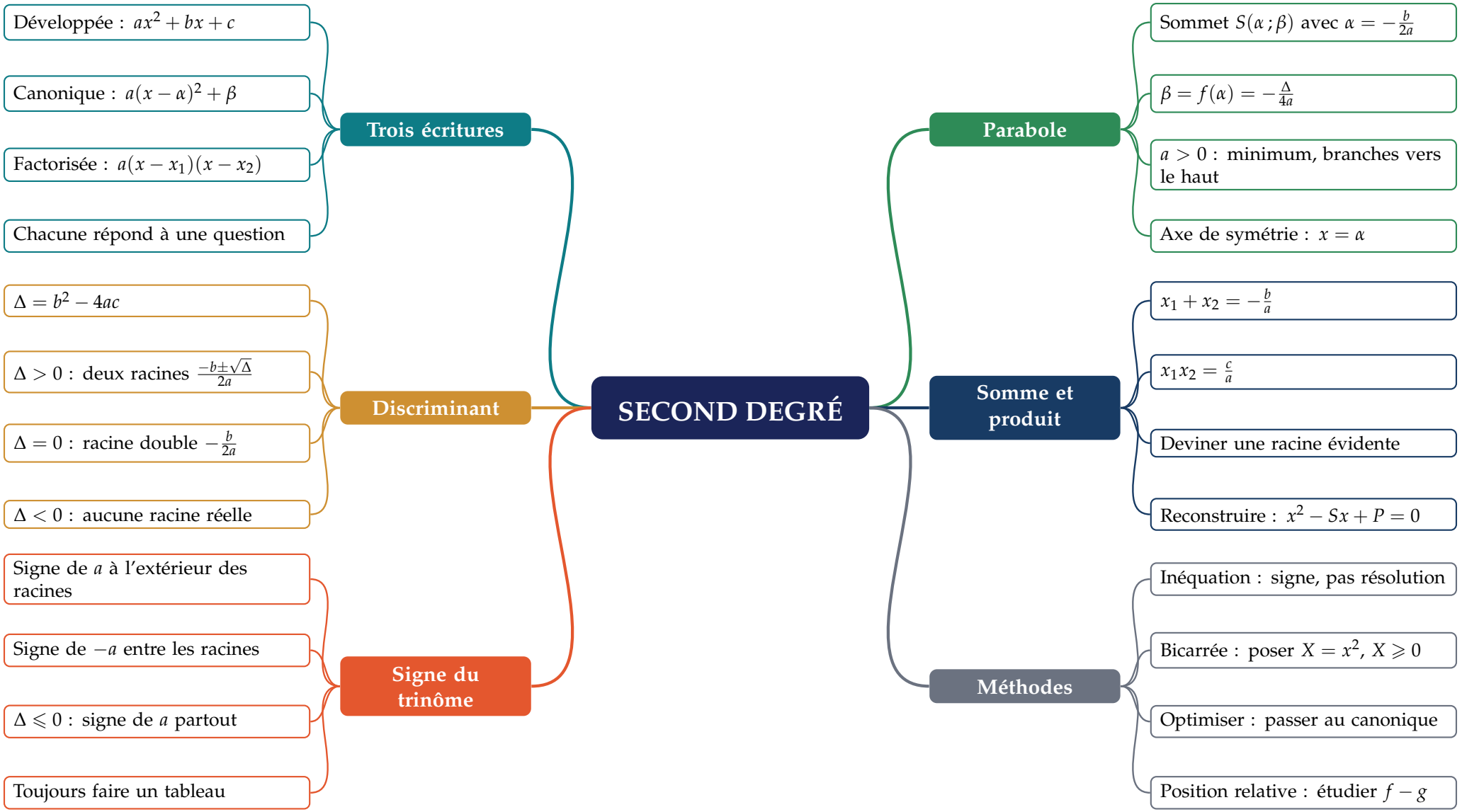
Les trois réflexes du chapitre

1. Forme canonique : $\alpha=-\frac{b}{2a}$, $\beta=f(\alpha)$. Elle donne le sommet, l'extremum, les variations et l'axe de symétrie.

2. Discriminant : $\Delta=b^2-4ac$ décide de tout — nombre de racines, factorisation, signe, position de la parabole.

3. Signe du trinôme : toujours du signe de a, sauf entre ses racines éventuelles. Un tableau de signes bien posé résout toutes les inéquations.

Avant de calculer Δ : ramener à la forme $ax^2+bx+c=0$, chercher une factorisation évidente ou une racine évidente, et penser à S et P.



Chapitre 1 · Chaque branche renvoie à une section du cours et à une fiche méthode.