Chapitre 1. Second degré

Devoir surveillé n°1

Forme canonique · équations et inéquations · lecture graphique · équation paramétrique

Durée : 2 heures — calculatrice collège autorisée

Nom : ..... Prénom : .....

Classe : **Première spécialité** Date : .....

Note
... / 20

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont prises en compte dans la notation. Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf dans l'exercice 1.

Exercice 1 — Questionnaire à choix multiples (5 points)

Pour chaque question, indiquer la seule réponse exacte parmi les quatre réponses proposées. Aucune justification n'est demandée.

N°	Question	a.	b.	c.	d.
1	La forme canonique de $f(x) = x^2 - 4x + 7$ est :	$(x-2)^2 - 3$	$(x-2)^2 + 3$	$(x+2)^2 + 3$	$(x-4)^2 + 7$
2	L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - 3x - 10 = 0$ est :	$\{-5\,;2\}$	$\{2\,;5\}$	$\{-2\,;5\}$	$\varnothing$
3	La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 8x - 1$ est croissante sur l'intervalle :	$[2\,;+\infty[$	$]-\infty\,;-2]$	$]-\infty\,;2]$	$[-2\,;+\infty[$
4	Une factorisation du trinôme $2x^2 + x - 6$ est :	$(2x+3)(x-2)$	$(x-3)(2x+2)$	$2(x-3)(x+2)$	$(2x-3)(x+2)$
5	Dans un repère, la parabole d'équation $y = 3x^2 - 12x + 5$ a pour sommet le point :	$S(-2\,;-7)$	$S(2\,;-7)$	$S(2\,;7)$	$S(-2\,;41)$

Exercice 2 — Équations (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

a. $x^2 - 6x + 8 = 0$

b. $2x^2 + 3x - 2 = 0$

c. $(2x-1)(x+2) = x^2 - 4$

d. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

Exercice 3 — Inéquations (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes.

a. $x^2 - 5x + 4 \leqslant 0$

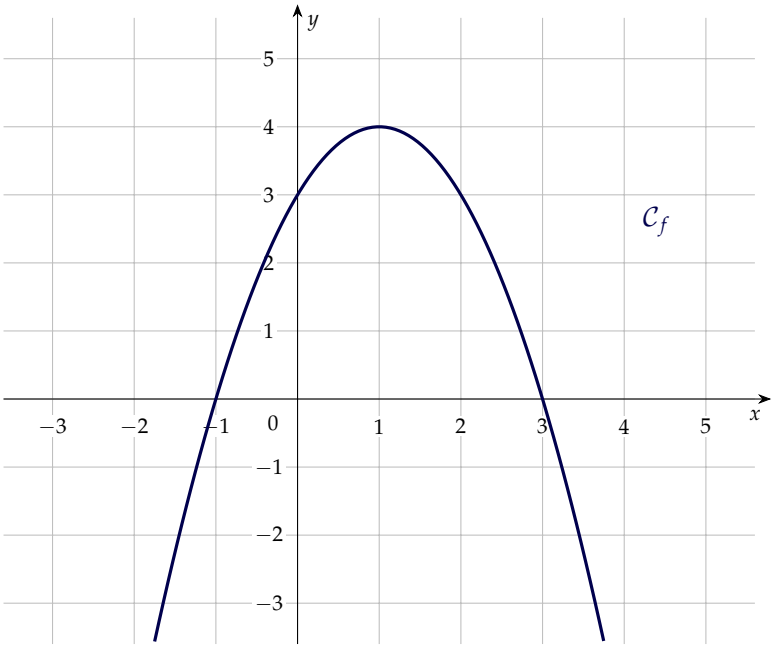
b. $-2x^2 + 5x + 3 \geqslant 0$

c. $x^2 - 3x + 4 > 0$

d. $\dfrac{x^2 - 4x - 5}{2 - x} \geqslant 0$

Exercice 4 — Étude graphique (3 points)

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-contre est la parabole représentant, dans un repère orthogonal, une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.



1. Par lecture graphique, déterminer les racines de f et en déduire la forme factorisée de $f(x)$.
2. Par lecture graphique, déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole et en déduire la forme canonique de $f(x)$, puis montrer que $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = -5$.

Exercice 5 — Équation paramétrique et somme-produit (4 points)

Partie A — Équation paramétrique.

Soit m un nombre réel. On considère l'équation d'inconnue x :

$$(E_m) \ : \quad x^2 - 2mx + m + 6 = 0.$$

1. Exprimer le discriminant Δ de (E_m) en fonction de m, et montrer que $\Delta = 4(m-3)(m+2)$.
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles (E_m) admet une unique solution. Préciser cette solution dans chaque cas.
3. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles (E_m) admet deux solutions distinctes, puis celles pour lesquelles (E_m) n'admet aucune solution.

Partie B — Somme et produit.

Déterminer deux nombres réels u et v tels que

$$\begin{cases} u + v = 11 \\ uv = 24. \end{cases}$$

DEVOIR SURVEILLÉ

Second degré

Durée : 1 heure · Calculatrice autorisée

Barème indicatif : Ex. 1 (4 pts) · Ex. 2 (5 pts) · Ex. 3 (6 pts) · Ex. 4 (5 pts). Les exercices sont indépendants ; toute résolution doit faire apparaître le discriminant.

Exercice 1 — Vrai ou faux (4 points)

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse *en justifiant*.

1. Si $\Delta < 0$, le trinôme garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.
2. La parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ avec $a < 0$ admet un minimum.
3. Si x_1 et x_2 sont les racines de $ax^2 + bx + c$, alors $x_1 + x_2 = -b/a$.
4. L'équation $x^2 = -4$ admet deux solutions réelles.

Exercice 2 — Résolutions (5 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $3x^2 - 7x + 2 = 0$
2. $x^2 + 6x + 9 = 0$
3. $-2x^2 + 3x - 5 = 0$
4. $3x^2 - 7x + 2 \leqslant 0$
5. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Exercice 3 — Étude d'un trinôme (6 points)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$, de courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthogonal.

1. Calculer le discriminant de f et déterminer ses racines.
2. En déduire une factorisation de $f(x)$.
3. Mettre $f(x)$ sous forme canonique et donner les coordonnées du sommet S de $\mathcal{C}$.
4. Dresser les tableaux de variations puis de signes de f.
5. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ en plaçant le sommet, les racines et le point d'ordonnée $f(0)$.

Exercice 4 — Un enclos contre un mur (5 points)

Un enclos rectangulaire est adossé à un mur : le mur forme un côté, les trois autres sont grillagés et l'on dispose de 60 m de grillage. On note x (en m) la longueur des deux côtés perpendiculaires au mur, et $A(x)$ l'aire (en m^2).

1. Justifier que le troisième côté mesure $60 - 2x$ et que $x \in \,]0\,;30[$.
2. Montrer que $A(x) = -2x^2 + 60x$.
3. Mettre $A(x)$ sous forme canonique et en déduire l'aire maximale.
4. Déterminer les x tels que $A(x) > 400$.

