Chapitre 2. Cours

Suites numériques

I. Généralités sur les suites

1. Définition et vocabulaire

Définition

Une **suite numérique** u est une liste ordonnée de nombres réels. C'est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou sur $\{n \geqslant n_0\}$) et à valeurs réelles :

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad n \longmapsto u(n) = u_n.$$

Le nombre u_n est le **terme de rang** n, ou terme général. La suite se note (u_n), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Exemple

$u_n = n^2 - 2$ pour $n \in \mathbb{N}$ donne $u_0 = -2$, $u_1 = -1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 7$.
$u_n = \dfrac{1}{n-4}$ pour $n \geqslant 5$ donne $u_5 = 1$ et $u_6 = \dfrac{1}{2}$.
$u_n = 2^n$ donne $u_{10} = 1024$.
$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$ donnent $u_1 = \sqrt{2}$ et $u_2 = \sqrt{3}$.

Attention

Ne pas confondre u_n, qui est un *nombre*, et (u_n), qui désigne la *suite* tout entière. De même, u_{n+1} est le terme suivant u_n, alors que $u_n + 1$ est le terme u_n augmenté de 1.

2. Les deux modes de génération

Définition (formule explicite)

Une suite est définie par une **formule explicite** lorsque $u_n = f(n)$: chaque terme se calcule directement à partir de son rang, indépendamment des précédents.

Exemple

$v_n = \dfrac{1}{n^2+1}$: $v_0 = 1$, $v_1 = \dfrac{1}{2}$, $v_2 = \dfrac{1}{5}$, $v_{10} = \dfrac{1}{101}$.
Avec $f(x) = x^2 + 2x + 7$ et $u_n = f(n)$, on a $u_n = n^2 + 2n + 7$, donc $u_0 = 7$, $u_1 = 10$, $u_2 = 15$, et $u_{n+1} = (n+1)^2 + 2(n+1) + 7 = n^2 + 4n + 10$.

Définition (relation de récurrence)

Une suite est définie par **récurrence** lorsqu'on donne son premier terme et une relation exprimant chaque terme à partir du précédent : $u_{n+1} = g(u_n)$.

Exemple

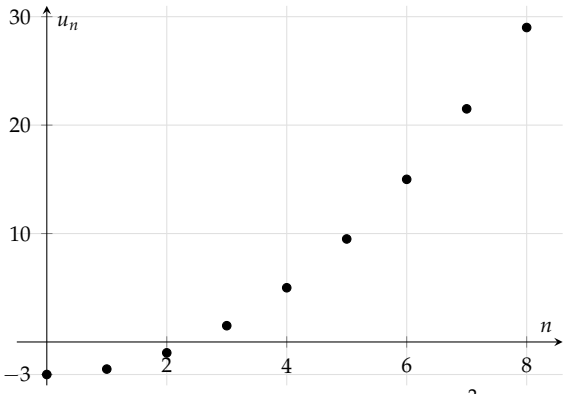
$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$: $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 13$, $u_4 = 40$.

Remarque

Avec une formule explicite, u_{100} se calcule en une ligne. Avec une relation de récurrence, il faut calculer tous les termes précédents — d'où l'intérêt, plus loin dans le chapitre, de trouver la forme explicite d'une suite arithmétique ou géométrique.

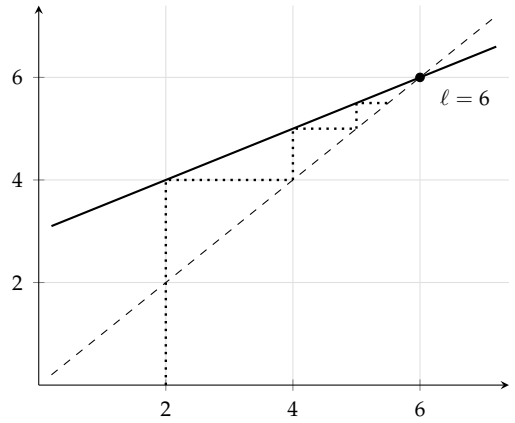
3. Représentation graphique

Suite explicite. On place les points de coordonnées $(n\,;u_n)$: on obtient un *nuage de points*, jamais une courbe continue.



2.1 — Nuage de points de la suite $u_n = \dfrac{n^2}{2} - 3$.

Suite récurrente. Lorsque $u_{n+1} = g(u_n)$, on trace la courbe de g et la droite d'équation $y = x$: on lit les termes en « escalier », en reportant chaque ordonnée sur l'axe des abscisses.



2.2 — Construction en escalier pour $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 3$.

4. Sens de variation

Définition

La suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p lorsque $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout $n \geqslant p$, et **décroissante** lorsque $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant p$. Une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.

Remarque

Une suite n'est pas nécessairement monotone : $u_n = (-1)^n$ alterne entre 1 et -1. Une suite vérifiant $u_{n+1} = u_n$ pour tout n est **constante**.

Méthode — trois façons d'étudier le sens de variation

- ✓ **Signe de la différence.** Si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout n, la suite est croissante ; si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, elle est décroissante. C'est la méthode à essayer en premier.
- ✓ **Comparaison du quotient à 1.** Si tous les termes sont *strictement positifs* : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ donne une suite croissante, $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ une suite décroissante. Méthode adaptée aux quotients et aux puissances.
- ✓ **Variations d'une fonction.** Si $u_n = f(n)$ avec f monotone sur $[0\,;+\infty[$, la suite a le même sens de variation que f.

Attention

La réciproque du troisième point est fausse : une suite peut être croissante sans que la fonction associée le soit sur tout l'intervalle. Cette méthode ne s'applique que si la suite est donnée par une **formule explicite** — jamais par récurrence.

Exemple

$u_n = n^2 + n + 3$: $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) - n^2 - n = 2n + 2 > 0$, la suite est croissante.
$v_n = \dfrac{n}{3^n}$ (termes strictement positifs pour $n \geqslant 1$) : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{n+1}{3n} \leqslant 1$ dès que $n \geqslant 1$, la suite est décroissante à partir du rang 1.

II. Suites arithmétiques

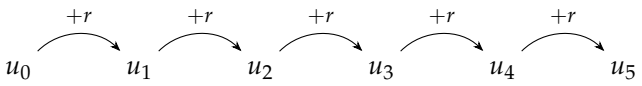
1. Définition

Définition

(u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout n,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le réel r est la **raison** de la suite : on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours r.



Exemple

2, 5, 8, 11, … est arithmétique de raison 3. La suite des entiers naturels est arithmétique de raison 1, celle des entiers pairs de raison 2. Plus généralement, toute suite définie par $u_n = an + b$ est arithmétique de raison a et de premier terme b.

Méthode — démontrer qu'une suite est arithmétique

Calculer $u_{n+1} - u_n$ et montrer que le résultat est une **constante**, indépendante de n. Cette constante est la raison.

2. Forme explicite

Propriété 1

Si (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors pour tout n :

$$u_n = u_0 + nr.$$

Démonstration

Par définition, $u_1 = u_0 + r$, $u_2 = u_1 + r$, …, $u_n = u_{n-1} + r$. En additionnant ces n égalités membre à membre :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + nr.$$

Après simplification des termes communs, il reste $u_n = u_0 + nr$.

Propriété 2

Pour tous entiers n et p : $u_n = u_p + (n-p)r$.

Démonstration

D'après la propriété 1, $u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$. En soustrayant : $u_n - u_p = (n-p)r$.

Remarque

Cette seconde formule permet de calculer n'importe quel terme à partir d'un terme quelconque, sans connaître u_0, et de retrouver la raison quand on connaît deux termes.

Exemple

$u_3 = 5$ et $u_7 = 21$: la propriété 2 donne $21 = 5 + 4r$, donc $r = 4$, puis $u_0 = u_3 - 3r = -7$.

3. Sens de variation

Propriété

Soit (u_n) arithmétique de raison r. Si $r > 0$, la suite est croissante ; si $r < 0$, elle est décroissante ; si $r = 0$, elle est constante.

Démonstration

$u_{n+1} - u_n = (u_n + r) - u_n = r$: le signe de la différence est celui de r, pour tout n.

4. Somme de termes consécutifs

Propriété

Pour tout entier $n \geqslant 1$: $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration

On écrit la somme dans les deux sens :

$$\begin{array}{ccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n \\ S & = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 1 \end{array}$$

En additionnant colonne par colonne, chaque colonne vaut $n+1$ et il y en a n : $2S = n(n+1)$, d'où $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Propriété (cas général)

Si (u_n) est arithmétique, alors

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2},$$

autrement dit :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Attention

Le nombre de termes de $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ est $n - p + 1$, et non $n - p$. De u_4 à u_{15}, il y a $15 - 4 + 1 = 12$ termes.

III. Suites géométriques

1. Définition

Définition

(v_n) est une **suite géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout n,

$$v_{n+1} = v_n \times q.$$

Le réel q est la **raison** : on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par q.

Exemple

5, 10, 20, 40, … est géométrique de raison 2. Toute suite définie par $v_n = b \times a^n$ est géométrique de raison a et de premier terme b.

Méthode — démontrer qu'une suite est géométrique

Montrer que le quotient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ est une **constante** — après avoir vérifié qu'aucun terme n'est nul.

2. Forme explicite

Propriété 1

Si (v_n) est géométrique de premier terme v_0 et de raison q, alors $v_n = v_0\, q^n$. Plus généralement, $v_n = v_p\, q^{n-p}$.

Démonstration

On multiplie membre à membre les n égalités $v_1 = v_0 q$, $v_2 = v_1 q$, …, $v_n = v_{n-1} q$:

$$v_1 v_2 \cdots v_n = v_0 v_1 \cdots v_{n-1} \times q^n.$$

Après simplification, $v_n = v_0 q^n$.

Exemple

$v_0 = 2$ et $q = -3$: $v_4 = 2 \times (-3)^4 = 2 \times 81 = 162$.

3. Sens de variation

Propriété

Soit (v_n) géométrique de raison q et de premier terme $v_0 > 0$.

- Si $q > 1$, la suite est croissante ; si $0 < q < 1$, elle est décroissante ; si $q = 1$, elle est constante.
- Si $q < 0$, la suite n'est pas monotone : ses termes changent alternativement de signe.

Si $v_0 < 0$, les sens de variation sont inversés.

4. Somme de termes consécutifs

Propriété

Pour $q \neq 1$: $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Plus généralement, pour une suite géométrique de raison $q \neq 1$:

$$S = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}.$$

Démonstration

Posons $S = 1 + q + \cdots + q^n$. Alors $qS = q + q^2 + \cdots + q^{n+1}$, donc $S - qS = 1 - q^{n+1}$, soit $S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$. Comme $q \neq 1$, on divise par $1 - q$.

IV. Méthodes

Méthode 1 — Reconnaître la nature d'une suite

1. Calculer $u_{n+1} - u_n$: si le résultat est constant, la suite est arithmétique de raison cette constante.
2. Sinon, calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$: si le résultat est constant, la suite est géométrique.

3. Si aucun des deux n'est constant, conclure que la suite n'est ni arithmétique ni géométrique — un contre-exemple sur trois termes suffit.

Méthode 2 — Calculer une somme de termes consécutifs

1. Identifier la nature de la suite et sa raison.
2. Compter les termes : de u_p à u_n, il y en a $n - p + 1$.
3. Appliquer la formule : moyenne des termes extrêmes pour une suite arithmétique, $\dfrac{1 - q^{\text{nb}}}{1 - q}$ pour une suite géométrique.

Méthode 3 — Résoudre un problème concret

1. Nommer la suite et préciser ce que représente u_n, avec l'unité et le rang initial.
2. Traduire l'énoncé par une relation de récurrence : ajout constant $\Rightarrow$ arithmétique, pourcentage ou coefficient multiplicateur $\Rightarrow$ géométrique.
3. Donner la forme explicite, puis répondre à la question posée.

Remarque — bon réflexe

Augmenter de t % revient à multiplier par $1 + \dfrac{t}{100}$, diminuer de t % à multiplier par $1 - \dfrac{t}{100}$. Un pourcentage d'évolution constant signale toujours une suite **géométrique**.

V. Module Python

```
def terme(n):
  # suite definie par u(0) = 2 et u(n+1) = 0.5*u(n) + 3
  u = 2
  for k in range(n):
    u = 0.5 * u + 3
  return u
def somme(n):
  # somme des termes u(0) + u(1) + ...  + u(n)
  u = 2 ; s = 2
  for k in range(n):
    u = 0.5 * u + 3
    s = s + u
  return s
def seuil(A):
  # plus petit rang n tel que u(n) > A
  u = 2 ; n = 0
  while u <= A:
    u = 0.5 * u + 3 ; n = n + 1
  return n
```

Exemple — trace d'exécution

`terme(4)` renvoie 5,75 ; `somme(4)` renvoie 22,25 ; `seuil(5.9)` renvoie 6.
Détail de la somme : $2 + 4 + 5 + 5{,}5 + 5{,}75 = 22{,}25$. Détail du seuil : les termes valent 2 ; 4 ; 5 ; 5,5 ; 5,75 ; 5,875 ; 5,9375 — le premier à dépasser 5,9 est u_6.

Attention

Dans `seuil`, si le seuil demandé dépasse la valeur vers laquelle la suite se rapproche — ici 6 — la boucle ne s'arrête jamais. Vérifier toujours que le seuil est atteignable.

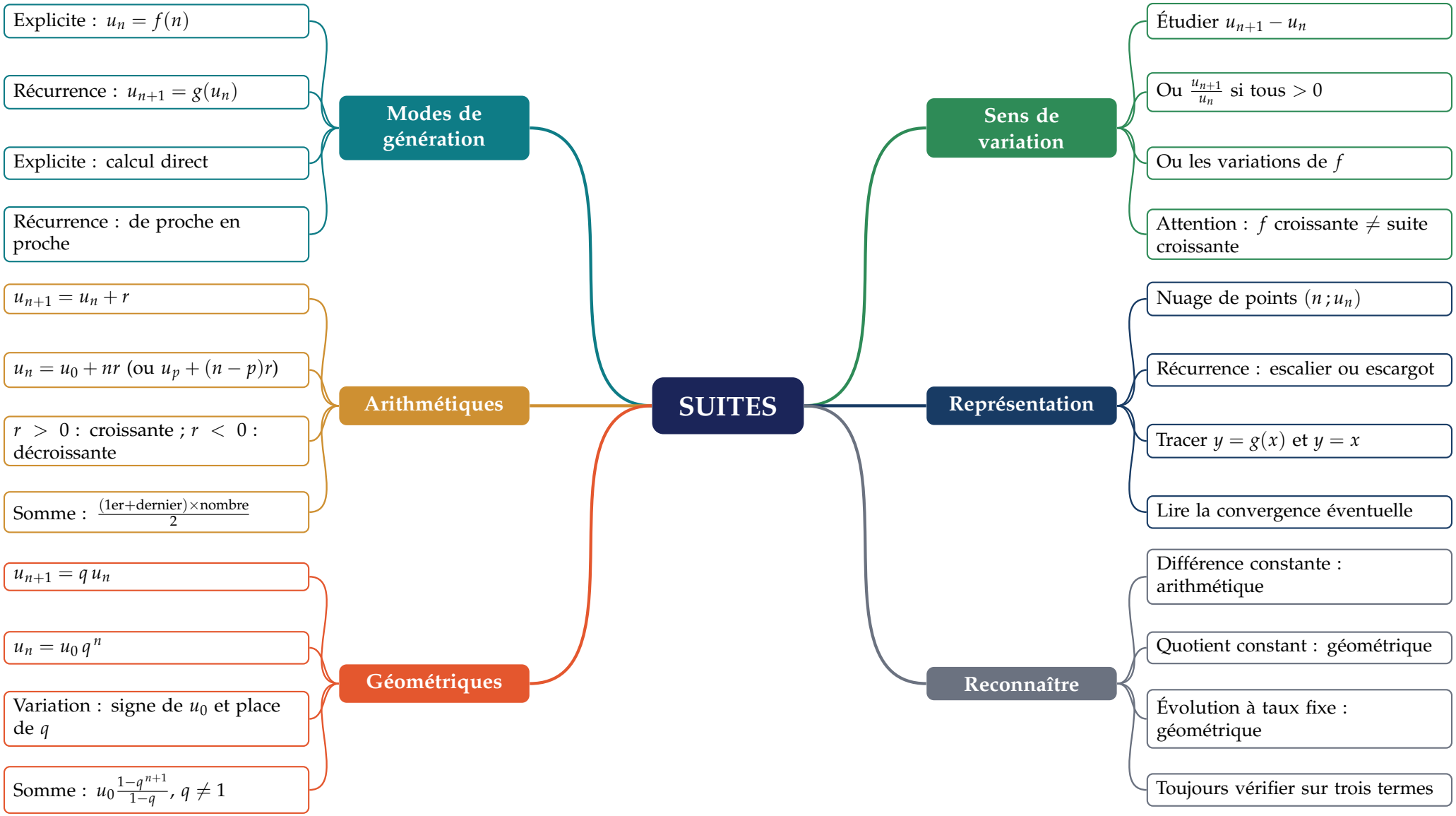
Les trois réflexes du chapitre

1. Nature d'abord. Différence constante ⇒ arithmétique ; quotient constant ⇒ géométrique. Tout le reste en découle.

2. Forme explicite. $u_n = u_0 + nr$ et $v_n = v_0 q^n$: elles donnent n'importe quel terme sans calculer les précédents.

3. Compter les termes. De u_p à u_n, il y a $n - p + 1$ termes — l'erreur la plus fréquente dans les calculs de sommes.

Variations. Signe de $u_{n+1} - u_n$, ou quotient comparé à 1 si les termes sont strictement positifs.



Chapitre 2 · Chaque branche renvoie à une section du cours et à une fiche méthode.