DEVOIR SURVEILLÉ

Suites numériques

Durée : 1 heure · Calculatrice autorisée

Barème indicatif : Ex. 1 (4 pts) · Ex. 2 (5 pts) · Ex. 3 (6 pts) · Ex. 4 (5 pts). Les exercices sont indépendants ; toute nature de suite annoncée doit être démontrée.

Exercice 1 — Reconnaître une suite (4 points)

Pour chacune des suites suivantes, calculer les trois premiers termes et préciser sa nature, en justifiant.

1. $u_n = 4n - 7$
2. $v_n = 2 \times 3^n$
3. $w_0 = 5$ et $w_{n+1} = w_n - 2$
4. $t_0 = 1$ et $t_{n+1} = t_n^2 + 1$

Exercice 2 — Une suite arithmétique (5 points)

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_2 = 5$ et $u_7 = 20$.

1. Déterminer sa raison r, puis u_0.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer u_{30}.
4. Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{30}$.
5. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 500$.

Exercice 3 — Une suite auxiliaire (6 points)

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. On pose $v_n = u_n - 10$. Démontrer que (v_n) est géométrique ; préciser raison et premier terme.
3. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
4. Calculer u_{10}, arrondi au millième.
5. Démontrer que $u_n < 10$ pour tout n.
6. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 9{,}9$.

Exercice 4 — Les adhérents d'un club (5 points)

Un club sportif compte 800 adhérents en 2020. Chaque année, il perd 15 % de ses adhérents et en recrute 180 nouveaux. On note a_n le nombre d'adhérents n années après 2020, avec $a_0 = 800$.

1. Justifier que $a_{n+1} = 0{,}85\,a_n + 180$, puis calculer a_1 et a_2.
2. On pose $b_n = a_n - 1\,200$. Démontrer que (b_n) est géométrique de raison 0,85.
3. Exprimer a_n en fonction de n.
4. Calculer le nombre d'adhérents prévu en 2030, arrondi à l'unité.
5. Que peut-on dire de l'évolution de l'effectif à long terme ?