Chapitre 2. Fiche d'exercices n°1

Suites numériques

Série A ⋆ — Automatismes

Exercice 1 ⋆

Calculer les quatre premiers termes de chaque suite.

a. $u_n = 3n - 5$ pour $n \geqslant 0$
b. $v_n = n^2 + 1$ pour $n \geqslant 0$
c. $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 2w_n + 1$
d. $t_0 = 10$ et $t_{n+1} = t_n - 4$

Exercice 2 ⋆

Préciser si la suite est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre, et donner sa raison le cas échéant.

a. $u_n = 5n - 2$
b. $v_n = 3 \times 2^n$
c. $w_n = n^2$
d. $t_{n+1} = t_n + 7$

Exercice 3 ⋆

(u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 3$. Calculer u_1, u_5 et u_{20}, puis exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 4 ⋆

(v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison $q = 2$. Calculer v_1, v_4 et v_{10}, puis exprimer v_n en fonction de n.

Exercice 5 ⋆

Déterminer le sens de variation de chaque suite.

a. $u_n = -3n + 7$
b. $v_n = 0{,}5 \times 3^n$
c. $w_n = 2 \times 0{,}5^n$
d. $t_n = n^2 - 4n$

Exercice 6 ⋆

Calculer $1 + 2 + 3 + \cdots + 50$, puis $1 + 3 + 5 + \cdots + 99$.

Exercice 7 ⋆

Calculer $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{10}$.

Série B ⋆⋆ — Application

Exercice 8 ⋆⋆

(u_n) est arithmétique et vérifie $u_3 = 7$ et $u_8 = 22$.

a. Déterminer la raison r puis u_0.

b. Exprimer u_n en fonction de n, et calculer u_{50}.

Exercice 9 ⋆⋆

(v_n) est géométrique à termes positifs et vérifie $v_2 = 12$ et $v_5 = 96$.

a. Déterminer la raison q puis v_0.

b. Exprimer v_n en fonction de n, et calculer v_{10}.

Exercice 10 ⋆⋆

Un capital de 2 000 euros est placé au taux annuel de 3 % à intérêts composés. On note C_n le capital au bout de n années.

a. Justifier que (C_n) est géométrique et donner sa raison.

b. Calculer C_5, arrondi au centime.

c. Déterminer le nombre d'années au bout duquel le capital dépasse 3 000 euros.

Exercice 11 ⋆⋆

Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 3$.

a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

b. On pose $v_n = u_n - 6$. Démontrer que (v_n) est géométrique de raison 0,5.

c. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

d. Calculer u_{10}.

Exercice 12 ⋆⋆

Soit $u_n = 2n + 1$. Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$ de deux façons différentes.

Exercice 13 ⋆⋆

Une ville de 50 000 habitants perd 2 % de sa population chaque année. On note P_n la population au bout de n années.

a. Exprimer P_n en fonction de n.

b. Calculer P_{10}, arrondi à l'unité.

c. Au bout de combien d'années la population passe-t-elle sous 40 000 habitants ?

Exercice 14 ⋆⋆

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1{,}5\,u_n$.

a. Exprimer u_n en fonction de n.

b. Écrire un algorithme en Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > 1\,000$.

c. Donner la valeur renvoyée.

Exercice 15 ⋆⋆

On empile des cubes en escalier : 1 cube au premier étage, 2 au deuxième, 3 au troisième, et ainsi de suite.

a. Exprimer le nombre total de cubes utilisés pour n étages.

b. Combien d'étages peut-on construire avec exactement 300 cubes ?

Série C ⋆⋆⋆ — Approfondissement

Exercice 16 ⋆⋆⋆

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

a. Calculer u_1, u_2 et u_3, puis conjecturer une expression de u_n.

b. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Démontrer que (v_n) est arithmétique de raison 1.

c. En déduire u_n en fonction de n et valider la conjecture.

Exercice 17 ⋆⋆⋆

Soit $S_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}$.

a. Exprimer S_n en fonction de n, puis calculer S_4.

b. Démontrer que $S_n < \dfrac{3}{2}$ pour tout entier naturel n.

c. Déterminer le plus petit entier n tel que $\dfrac{3}{2} - S_n < 0{,}001$.

Exercice 18 ⋆⋆⋆

Un bassin contient 200 litres d'eau. Chaque jour, on en retire 10 % puis on ajoute 30 litres. On note V_n le volume au bout de n jours, avec $V_0 = 200$.

a. Justifier que $V_{n+1} = 0{,}9\,V_n + 30$, puis calculer V_1, V_2 et V_3.

b. On pose $w_n = V_n - 300$. Démontrer que (w_n) est géométrique.

c. Exprimer V_n en fonction de n et calculer V_{10}, arrondi au centilitre.

d. Que peut-on dire du volume à long terme ?

Exercice 19 ⋆⋆⋆

Démontrer que la somme des n premiers entiers impairs vaut n^2.

Exercice 20 ⋆⋆⋆

Soit a et b deux réels avec $a \neq 1$, et (u_n) définie par $u_{n+1} = a\,u_n + b$.

a. Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$ est géométrique de raison a.

b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n, u_0, a et b.

c. Retrouver ainsi le résultat de l'exercice 18.