Première Spécialité

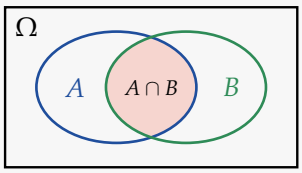
Probabilités conditionnelles et indépendance

Cours

Dans tout le chapitre, Ω désigne l'univers d'une expérience aléatoire et p une probabilité sur Ω. Pour un événement A, on note $\overline{A}$ l'événement contraire de A.

Remarque : rappels de seconde

- $A \cap B$ (« A et B ») est réalisé lorsque A et B le sont tous les deux ; $A \cup B$ (« A ou B ») lorsque l'un au moins des deux l'est.
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ et $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- A et B sont **incompatibles** lorsque $A \cap B = \varnothing$; alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- En situation d'**équiprobabilité** : $p(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre total d'issues}}$.



I. Probabilité conditionnelle

1. Une situation pour comprendre

Les 400 élèves de première d'un lycée ont répondu à la question : « Pratiquez-vous un sport en club ? ».

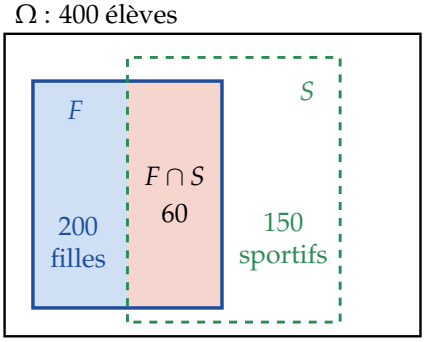
	Sport en club (S)	Pas de sport ($\overline{S}$)	Total
Filles (F)	60	140	200
Garçons (G)	90	110	200
Total	150	250	400

On choisit au hasard la fiche d'un élève. On note F : « l'élève est une fille » et S : « l'élève pratique un sport en club ».

- $p(S) = \dfrac{150}{400} = 0{,}375$ et $p(F \cap S) = \dfrac{60}{400} = 0{,}15$: 15 % des élèves sont des **filles qui font du sport**.
- On sait maintenant que la fiche tirée est celle d'une **fille**. On ne regarde plus que la ligne des filles : 60 filles sur 200 font du sport. La probabilité que l'élève fasse du sport **sachant que** c'est une fille est

$$\frac{60}{200} = 0{,}3.$$

- On remarque que $\dfrac{60}{200} = \dfrac{60/400}{200/400} = \dfrac{p(F \cap S)}{p(F)}$.



Sachant F, l'univers se **restreint** au rectangle bleu F (200 élèves) : on cherche la part de $F \cap S$ (60 élèves) dans F.

2. Définition et notation

Définition 1 : probabilité conditionnelle

Soit A et B deux événements avec $p(A) \neq 0$. La **probabilité de** B **sachant** A est le nombre noté $p_A(B)$ défini par

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

C'est la probabilité que B soit réalisé lorsqu'on sait que A est réalisé.

Remarques :

- Dans la situation précédente, $p_F(S) = 0{,}3$: **parmi les filles**, 30 % font du sport.
- En situation d'équiprobabilité : $p_A(B) = \dfrac{\text{nombre d'issues de } A \cap B}{\text{nombre d'issues de } A}$.
- Certains livres notent $p(B \mid A)$ au lieu de $p_A(B)$.

Méthode 1 : reconnaître une probabilité conditionnelle dans un énoncé

Les mots « **parmi** », « **sachant que** », « **lorsque** », « **si** » signalent une probabilité conditionnelle :

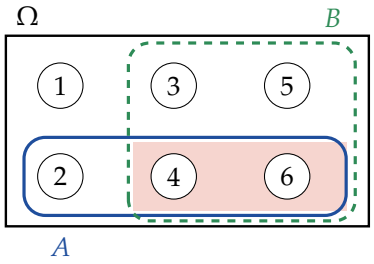
- « Parmi les filles, 30 % font du sport » se traduit par $p_F(S) = 0{,}3$;
- « 15 % des élèves sont des filles qui font du sport » se traduit par $p(F \cap S) = 0{,}15$;
- « Parmi les sportifs, 40 % sont des filles » se traduit par $p_S(F) = 0{,}4$.

Exemple : avec un dé

On lance un dé équilibré à six faces. On note A : « le résultat est pair » et B : « le résultat est supérieur ou égal à 3 ».

$A = \{2;4;6\}$, $B = \{3;4;5;6\}$ et $A \cap B = \{4;6\}$.

- $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{2/6}{3/6} = \dfrac{2}{3}$: parmi les 3 résultats pairs, 2 sont supérieurs ou égaux à 3.
- $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{2/6}{4/6} = \dfrac{1}{2}$.



En rose : $A \cap B = \{4;6\}$.

3. Propriétés

Propriété 1 :

Soit A et B deux événements avec $p(A) \neq 0$.

a. $0 \leqslant p_A(B) \leqslant 1$;

b. $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$;

c. $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$ (formule des probabilités composées).

Démonstration

a. $A \cap B$ est inclus dans A, donc $0 \leqslant p(A \cap B) \leqslant p(A)$. En divisant par $p(A) > 0$: $0 \leqslant \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} \leqslant 1$.

b. Les événements $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ sont incompatibles et leur réunion est A, donc $p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}) = p(A)$. En divisant par $p(A)$: $p_A(B) + p_A(\overline{B}) = 1$.

c. On multiplie par $p(A)$ les deux membres de l'égalité de la définition.

Attention

En général, $p_A(B) \neq p_B(A)$. Dans la situation du lycée : $p_F(S) = \dfrac{60}{200} = 0{,}3$ (parmi les filles, 30 % font du sport) alors que $p_S(F) = \dfrac{60}{150} = 0{,}4$ (parmi les sportifs, 40 % sont des filles).

Exercice 1 : à partir d'un tableau à double entrée

Une salle de sport compte 250 adhérents, dont 150 femmes. 90 adhérents pratiquent le yoga, parmi lesquels 60 femmes. On choisit un adhérent au hasard ; on note F : « l'adhérent est une femme », H : « l'adhérent est un homme » et Y : « l'adhérent pratique le yoga ».

a. Compléter le tableau ci-contre.

b. Calculer $p(Y)$ et $p(F \cap Y)$.

.....

.....

.....

	Y	$\overline{Y}$	Total
Femmes (F)			
Hommes (H)			
Total			250

c. Traduire par une phrase, puis calculer : $p_F(Y)$ et $p_Y(F)$.

.....

.....

.....

d. Un homme est choisi au hasard parmi les adhérents. Quelle est la probabilité qu'il pratique le yoga ? Les femmes pratiquent-elles davantage le yoga que les hommes ?

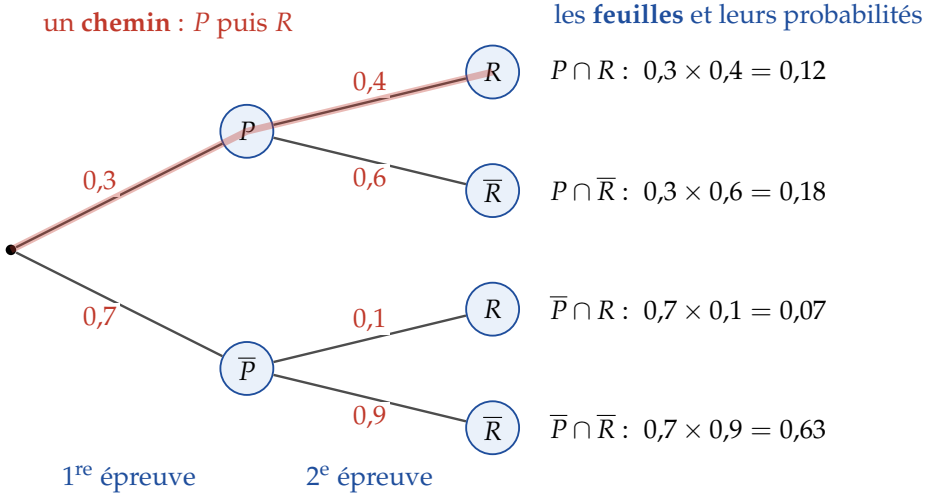
.....

.....

II. Arbres pondérés

1. Un exemple : la pluie et le bus

Lucas va au lycée en bus. Il pleut 30 % des jours. Les jours de pluie, le bus est en retard dans 40 % des cas ; les autres jours, il est en retard dans 10 % des cas. On choisit un jour au hasard et on note P : « il pleut » et R : « le bus est en retard ». La situation se représente par un **arbre pondéré** :



Les branches de la 1re épreuve portent $p(P)$ et $p(\overline{P})$. Les branches de la 2e épreuve portent des probabilités **conditionnelles** : sur les branches issues de P, on lit $p_P(R) = 0{,}4$ et $p_P(\overline{R}) = 0{,}6$; sur celles issues de $\overline{P}$, on lit $p_{\overline{P}}(R) = 0{,}1$ et $p_{\overline{P}}(\overline{R}) = 0{,}9$. Chaque chemin aboutit à une **feuille**, qui représente une intersection : le chemin surligné représente $P \cap R$.

2. Règles de calcul

Propriété 2 : règles sur un arbre pondéré

Règle 1. La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Règle 2. La probabilité d'un chemin (d'une feuille) est égale au **produit** des probabilités des branches de ce chemin.

Règle 3. La probabilité d'un événement est la **somme** des probabilités des feuilles qui le réalisent.

Exemple : suite de l'exemple de la pluie et du bus

Règle 1 : $p(\overline{P}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ et $p_P(\overline{R}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.
Règle 2 : c'est la formule des probabilités composées : $p(P \cap R) = p(P) \times p_P(R) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$.
Règle 3 : le bus est en retard dans deux feuilles, $P \cap R$ et $\overline{P} \cap R$:

$$p(R) = p(P \cap R) + p(\overline{P} \cap R) = 0{,}12 + 0{,}07 = 0{,}19.$$

Sur un jour pris au hasard, le bus est en retard avec une probabilité de 0,19 (environ un jour sur cinq).

3. Du tableau à l'arbre, et retour

Les quatre feuilles de l'arbre remplissent un **tableau de probabilités** à double entrée. Les totaux des lignes et des colonnes donnent $p(P)$, $p(\overline{P})$, $p(R)$ et $p(\overline{R})$.

Inversement, à partir d'un tableau, on construit l'arbre en divisant chaque case par le total de sa ligne :

$$p_P(R) = \frac{0{,}12}{0{,}3} = 0{,}4.$$

	R	$\overline{R}$	Total
P	0,12	0,18	0,3
$\overline{P}$	0,07	0,63	0,7
Total	0,19	0,81	1

La colonne R illustre la règle 3 : $0{,}12 + 0{,}07 = 0{,}19$.

Méthode 2 : « remonter » l'arbre

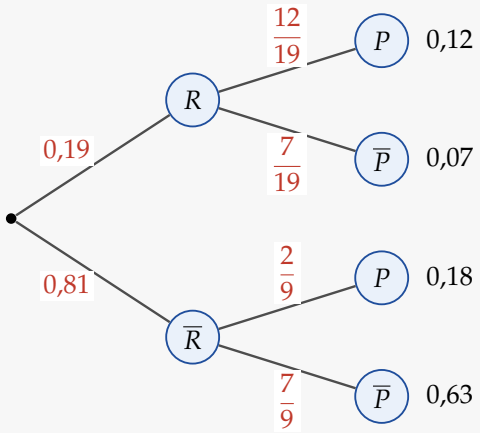
Question. Un jour, Lucas arrive en retard à cause du bus. Quelle est la probabilité qu'il ait plu ce jour-là ?

Réponse. On cherche $p_R(P)$: la condition R est sur le **second** niveau de l'arbre, on ne peut pas lire cette probabilité directement. On revient à la définition :

$$p_R(P) = \frac{p(P \cap R)}{p(R)} = \frac{0{,}12}{0{,}19} = \frac{12}{19} \approx 0{,}632.$$

Il pleut seulement 30 % des jours, mais près de 63 % des jours de retard sont des jours de pluie.

On peut aussi construire l'**arbre inversé** (ci-contre), qui commence par R : ses feuilles sont les mêmes (0,12 ; 0,07 ; 0,18 ; 0,63).



Exercice 2 : construire et exploiter un arbre

Dans un magasin de vélos, 60 % des vélos vendus sont électriques. 30 % des acheteurs d'un vélo électrique souscrivent une extension de garantie, contre 10 % des acheteurs d'un vélo classique. On choisit un acheteur au hasard ; on note E : « il a acheté un vélo électrique » et G : « il a souscrit l'extension de garantie ».

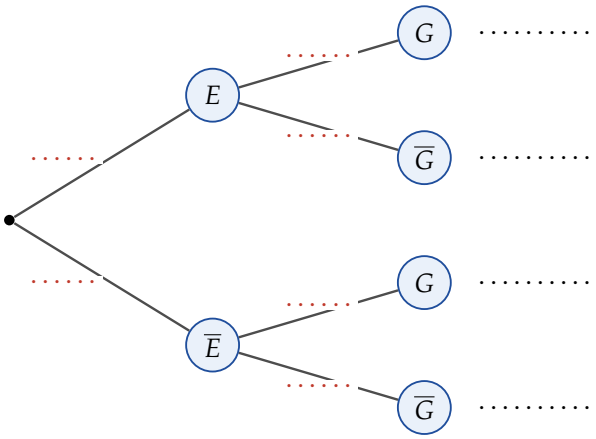
a. Compléter l'arbre pondéré ci-contre, ainsi que les probabilités des quatre feuilles.

b. Calculer $p(E \cap G)$, puis $p(G)$.

.....

.....

.....



c. L'acheteur a souscrit l'extension de garantie. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un vélo électrique ?

.....

.....

d. Compléter le tableau de probabilités ci-dessous, puis calculer $p_{\overline{G}}(E)$.

	G	$\overline{G}$	Total
E			
$\overline{E}$			
Total			1

.....

.....

.....

III. Formule des probabilités totales

1. Partition de l'univers

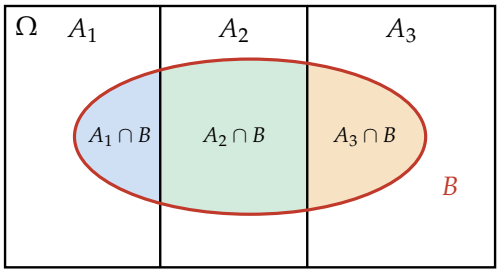
Définition 2 : partition

On dit que des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (de probabilités non nulles) forment une **partition** de Ω lorsque :

- ils sont deux à deux incompatibles ;
- leur réunion est Ω : $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

Autrement dit, chaque issue appartient à **un et un seul** des événements A_i.

Exemples : A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω ; les trois usines d'une entreprise, les filles et les garçons d'une classe…



B est découpé en trois morceaux incompatibles.

2. La formule

Théorème : formule des probabilités totales

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de Ω, alors pour tout événement B :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B) \\ &= p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \cdots + p(A_n) \times p_{A_n}(B). \end{aligned}$$

Cas particulier très fréquent (A et $\overline{A}$) : $\quad p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = p(A)\, p_A(B) + p(\overline{A})\, p_{\overline{A}}(B)$.

Démonstration

Les événements $A_1 \cap B, \ldots, A_n \cap B$ sont deux à deux incompatibles (car les A_i le sont) et leur réunion est $(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap B = \Omega \cap B = B$. Les probabilités d'événements incompatibles s'ajoutent, donc $p(B) = p(A_1 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B)$. On conclut avec $p(A_i \cap B) = p(A_i) \times p_{A_i}(B)$ (propriété 1.c). Sur un arbre, c'est la **règle 3** : on additionne les feuilles qui réalisent B.

Exemple : trois usines

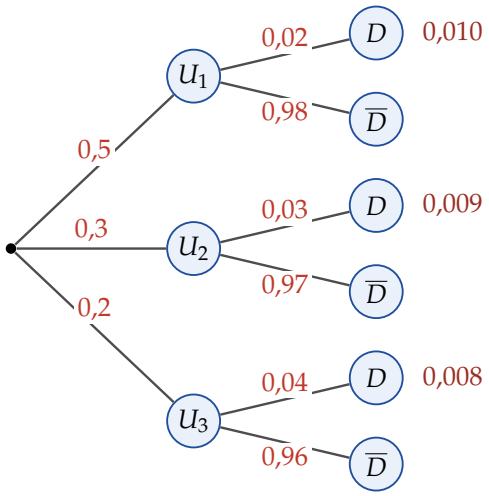
Une marque d'ampoules fabrique 50 % de ses ampoules dans l'usine U_1, 30 % dans l'usine U_2 et 20 % dans l'usine U_3. Les proportions d'ampoules défectueuses sont 2 %, 3 % et 4 %. On choisit une ampoule au hasard ; D : « elle est défectueuse ».

U_1, U_2, U_3 forment une partition, donc :

$$p(D) = 0{,}010 + 0{,}009 + 0{,}008 = 0{,}027.$$

Sachant que l'ampoule est défectueuse, la probabilité qu'elle vienne de U_3 est

$$p_D(U_3) = \frac{0{,}008}{0{,}027} = \frac{8}{27} \approx 0{,}296.$$



Méthode 3 : raisonner sur des effectifs fictifs

On peut retrouver ces résultats en imaginant un lot de 10 000 ampoules : 5 000 viennent de U_1, dont 2 % sont défectueuses, soit 100 ; de même 90 ampoules défectueuses viennent de U_2 et 80 de U_3.

- $p(D) = \dfrac{270}{10\,000} = 0{,}027$;
- $p_D(U_3) = \dfrac{80}{270} = \dfrac{8}{27}$.

Ce tableau d'effectifs est souvent plus parlant qu'un arbre.

	D	$\overline{D}$	Total
U_1	100	4 900	5 000
U_2	90	2 910	3 000
U_3	80	1 920	2 000
Total	270	9 730	10 000

Exercice 3 : un test de dépistage (d'après bac)

Lors d'une épidémie chez des bovins, un test de dépistage est mis au point. Dans la population étudiée, 2 % des animaux sont malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 85 % des cas ; si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas. On choisit un animal au hasard ; on note M : « l'animal est malade » et T : « le test est positif ».

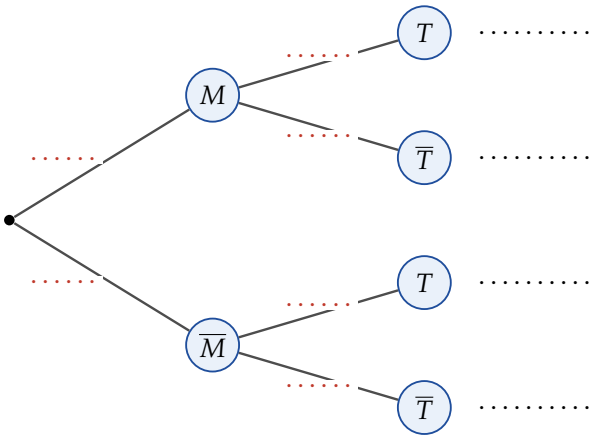
a. Compléter l'arbre pondéré ci-contre.

b. Calculer la probabilité que le test soit positif.

.....

.....

.....



c. On imagine un troupeau de 10 000 animaux. Compléter le tableau d'effectifs ci-dessous.

	Test positif (T)	Test négatif ($\overline{T}$)	Total
Malades (M)			
Sains ($\overline{M}$)			
Total			10 000

d. Le test d'un animal est positif. Quelle est la probabilité qu'il soit réellement malade ? Commenter.

.....

.....

.....

IV. Indépendance de deux événements

1. Définition

Définition 3 : événements indépendants

Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Propriété 3 : caractérisation par les probabilités conditionnelles

Si $p(A) \neq 0$, alors : A et B sont indépendants $\iff p_A(B) = p(B)$.
Autrement dit, savoir que A est réalisé **ne change pas** la probabilité de B.

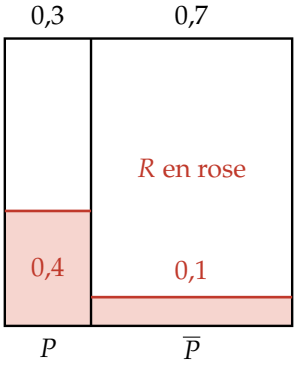
Démonstration

Comme $p(A) \neq 0$: $p_A(B) = p(B) \iff \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = p(B) \iff p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

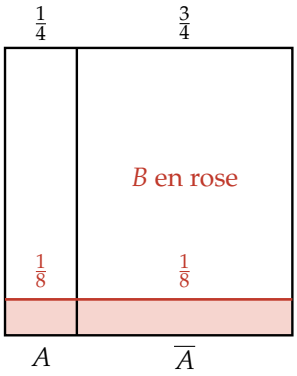
Exemples :

• On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. A : « c'est un trèfle », B : « c'est une dame ».
$p(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $p(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{32} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8}$: A et B sont **indépendants**.
Savoir que la carte est un trèfle ne renseigne pas sur le fait que ce soit une dame : $p_A(B) = \frac{1}{8} = p(B)$.

• Dans le lycée de la partie I : $p_F(S) = 0{,}3$ alors que $p(S) = 0{,}375$. Les événements F et S ne sont **pas indépendants** : la proportion de sportifs n'est pas la même chez les filles que dans l'ensemble des élèves.



Pluie et retard : la part de R **dépend** de la colonne (0,4 ou 0,1) : P et R ne sont pas indépendants.



Trèfle et dame : la part de B est la **même** ($\frac{1}{8}$) dans les deux colonnes : A et B sont indépendants.

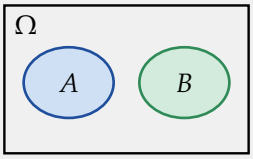
2. Ne pas confondre indépendants et incompatibles

Attention

• **Incompatibles** ($A \cap B = \varnothing$) : A et B ne peuvent pas se produire en même temps. C'est une propriété des **ensembles**, visible sur un schéma.

• **Indépendants** : la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de l'autre. C'est une propriété des **probabilités**, qui se vérifie par un calcul.

Si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$, deux événements incompatibles ne sont **jamais** indépendants : $p(A \cap B) = 0$ alors que $p(A) \times p(B) \neq 0$.
Par exemple, avec un dé, « obtenir 1 » et « obtenir un nombre pair » sont incompatibles, et savoir que le résultat est 1 rend « pair » impossible.



A et B incompatibles.

3. Indépendance et événements contraires

Propriété 4 :

Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants (de même que A et $\overline{B}$, et $\overline{A}$ et $\overline{B}$).

Démonstration

Les événements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ forment une partition de B, donc $p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B)$.
Comme A et B sont indépendants :

$$p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A)\,p(B) = p(B)\big(1 - p(A)\big) = p(\overline{A}) \times p(B).$$

Donc $\overline{A}$ et B sont indépendants. En échangeant les rôles de A et B, puis en appliquant deux fois ce résultat, on obtient les autres cas.

Exemple : lunettes et âge

Dans une ville, 71 % des habitants portent des lunettes ; parmi eux, 37 % ont 55 ans ou plus. Par ailleurs, 63 % des habitants ont moins de 55 ans. On choisit un habitant au hasard : L : « il porte des lunettes », A : « il a 55 ans ou plus ».

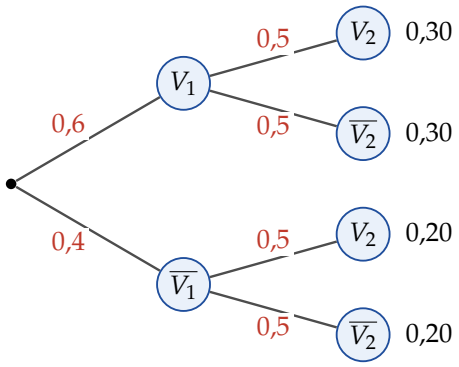
$p_L(A) = 0{,}37$ et $p(A) = 1 - 0{,}63 = 0{,}37$: $p_L(A) = p(A)$, donc A et L sont indépendants, et $p(A \cap L) = 0{,}71 \times 0{,}37 = 0{,}2627$. D'après la propriété 4, $\overline{A}$ et L sont aussi indépendants : $p_L(\overline{A}) = p(\overline{A}) = 0{,}63$.

4. Succession de deux épreuves indépendantes

Lorsque deux épreuves successives sont **indépendantes** (le résultat de la première n'influence pas la seconde), les probabilités de la seconde épreuve sont les **mêmes** sur toutes les branches de l'arbre, et la probabilité d'une feuille est le produit des probabilités des deux résultats.

Exemple. Sur le trajet de Sarah, deux feux tricolores fonctionnent de façon indépendante. Le premier est vert avec la probabilité 0,6, le second avec la probabilité 0,5.

- $p(\text{deux feux verts}) = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3$;
- $p(\text{aucun feu vert}) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2$;
- $p(\text{au moins un feu vert}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.



Les branches du second niveau portent toutes les mêmes probabilités.

Exercice 4 : indépendance à partir d'un tableau

Un club de 200 adhérents propose du tennis et du golf. 120 adhérents jouent au tennis, 50 au golf, et 30 pratiquent les deux. On choisit un adhérent au hasard : T : « il joue au tennis », G : « il joue au golf ».

a. Compléter le tableau d'effectifs ci-contre.

b. Les événements T et G sont-ils indépendants ?

.....

.....

.....

	G	$\overline{G}$	Total
T			
$\overline{T}$			
Total			200

c. Calculer $p_T(G)$ et $p_{\overline{T}}(G)$. Interpréter.

.....

.....

d. Sans calcul, que peut-on dire des événements $\overline{T}$ et $\overline{G}$? Justifier.

.....

.....

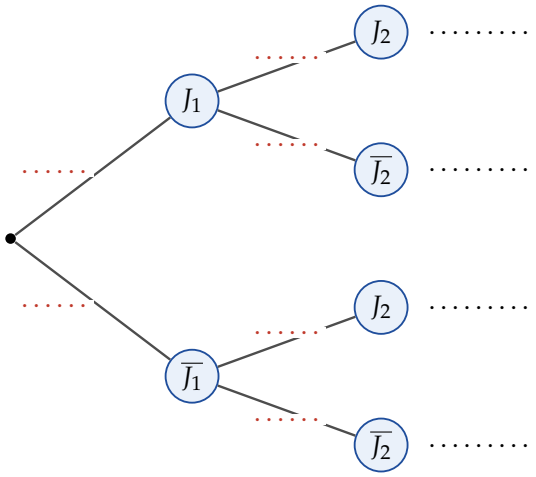
e. Calculer la probabilité que l'adhérent pratique au moins l'un des deux sports.

.....

.....

Exercice 5 : deux épreuves indépendantes

Un QCM comporte deux questions ; chacune propose quatre réponses dont une seule est juste. Un élève répond au hasard, de façon indépendante, aux deux questions. On note J_1 et J_2 les événements « la réponse à la question 1 (resp. 2) est juste ».



a. Compléter l'arbre ci-contre.

b. Calculer la probabilité que les deux réponses soient justes, puis qu'aucune ne le soit.

.....

.....

c. Calculer la probabilité d'avoir au moins une réponse juste, puis exactement une réponse juste.

.....

.....

.....

.....

d. Le QCM comporte maintenant trois questions du même type. Calculer la probabilité que les trois réponses soient justes, puis celle d'obtenir au moins une réponse juste.

.....

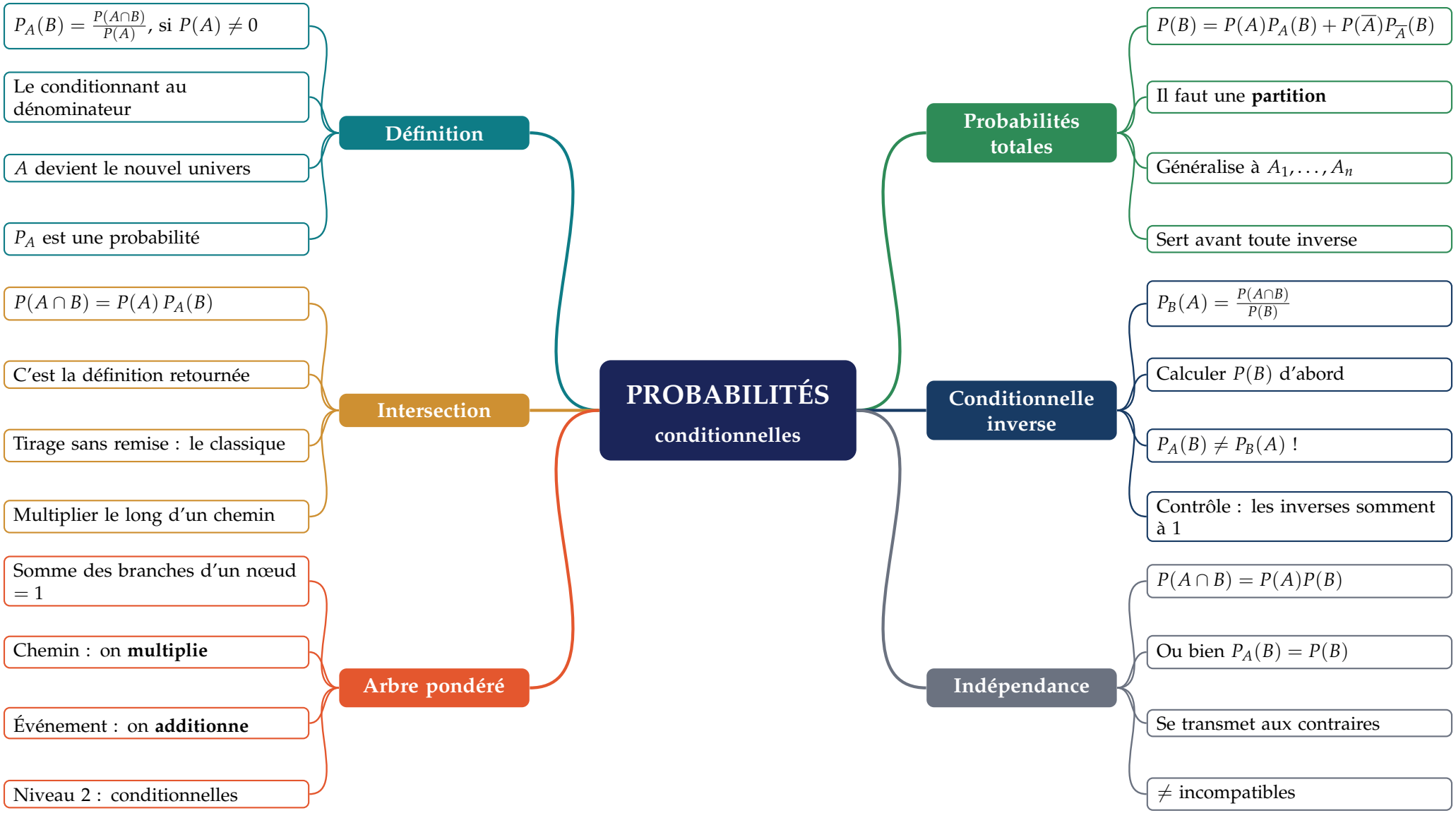
.....

.....

.....

L'essentiel du chapitre

Probabilité conditionnelle	$p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$ (probabilité de B « parmi » les issues de A) ; $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$.
Arbre pondéré	Branches d'un nœud : somme 1 ; chemin : on **multiplie** ; événement : on **additionne** les feuilles.
Probabilités totales	$p(B) = p(A)\,p_A(B) + p(\overline{A})\,p_{\overline{A}}(B)$ (et de même avec une partition $A_1, \ldots, A_n$).
Remonter l'arbre	$p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$, avec $p(B)$ calculée par la formule des probabilités totales.
Indépendance	$p(A \cap B) = p(A)\,p(B) \iff p_A(B) = p(B)$; à ne pas confondre avec incompatibles ($A \cap B = \varnothing$).



Chapitre 3 · Chaque branche renvoie à une section du cours et à une fiche méthode.